

# 生かす数学

高校 数学 I

高校 数学 SA

## はじめに

私達は、平成 10 年の学習指導要領の改訂で算数・数学の内容が 3 割削減されたのを憂い、「我が国の望ましい算数・数学のカリキュラム」の開発を思い立ち、日本教材文化研究財団のご好意とご協力を得て、平成 12 年からカリキュラムの研究・開発に当たり、平成 14 年にその案を発表した。その後、平成 15 年からは、そのカリキュラムを具体化する教科書の執筆活動にもご協力をいただいていた。さらに、今回、東京書籍のご好意も得て、ここに教科書の形で発表することができるようになった。日本教材文化研究財団と東京書籍に心から感謝するとともに、本教科書の作成にご協力いただいた多くの方々にも心から感謝の意を表する次第である。

### 本教科書シリーズ「生かす算数・数学」の特色

本教科書の作成にあたっては、次のことに心掛けた。

#### 1. 数学を利用する能力と態度の育成

これからは、これまで以上に数学を利用する機会が増え、数学を用いて事象を数理的にとらえ、そこにある問題を適切に処理できる能力と態度を身につけることが欠かせない社会になる。そうした社会では、すべての子どもが数学を活用して現実世界の様々な事象を表現し、その仕組みを解明し、数学を用いて予想したり問題解決を行ったりすることができるような算数・数学教育をすることが求められる。このようなことはこれまでも言われてきたことではあるが、これまでの算数・数学の指導は、まず数学の理解をはかり、技能を習熟させ、そのあと数学を用いて問題を解決させるという形、つまり、数学の理解→応用という形で行なわれてきたが、そのような応用は数学の理解や習熟の程度を試すためと考えられ、数学が役に立つという意識を育てら

れないできた。

本教科書では、身の回りの問題を数学を用いて解決することを中心にするとともに、数学の有用性が分かるようにするため、まず、解決したい問題を提示し、その解決に必要な数学を学んで問題を解決することを通して、数学を用いることによって問題が解決できたという気持ちが生まれるようにした。

そうしない単元では、数学を学ぶ必然性が分かるような展開を工夫した。

## 2. 教える数学のレベルの向上

身の回りにある問題を数学を用いて解決できるためには、事象を数学的に表現し処理するために必要な三角関数や指数関数などのいろいろな関数、微分・積分の基礎までを身につけていることが必要であると考え、高校1年までにそれらをすべての生徒が学習できるようにした。

## 3. テクノロジーの活用

グラフ電卓やパソコンなどのテクノロジーを適切に活用し、計算などの技能の習熟に必要な時間を少なくすると同時に、これまで処理できなかった計算をしたり、手で書けなかったグラフを描かせたりすることなどによって、解決できる問題の幅を広げるようにした。

## 4. 単元構成

学習の効率等を考え、単元の構成をこれまでと変えたところがある。たとえば、小学校では、これまで小数と分数の学習は別々の単元で学習してきたが、本教科書シリーズでは、小数と分数を関連づけて学ばせるため、小数と分数を同じ単元で学習させるようにした。中学校では、これまで方程式と関数は単元が分けられ、方程式→関数の順序であったが、関数の単元の中に方程式を含めて学習できるようにした。

(編集代表 杉山吉茂)

## 高等学校編の特色

高等学校では、日常事象を数理的に把握し、数学を用いて問題を解決する力を育てるという姿勢を一層強めた。

1. 数学を用いて問題を解決するという数学学習の基本のねらいを一層強めるために、具体的な問題の解決のために数学を学んだり創造したりするという学習を中学校以上に強くした。
2. 生徒の身の周りで見られる問題を解決することができるためには、整関数だけでなく、三角関数、指数関数などのいろいろな関数を理解して用いること、および、微分・積分が不可欠であると考え、高校1年までにそれらを学習できるようにした。
3. いろいろな関数をうまく使って問題を解決できるようにするためには、事象をいろいろな関数でとらえるだけでなく、それらの関数をグラフに表したり処理したりすることが欠かせない。それらの処理を効率的にするため、グラフ電卓やパソコンなどのテクノロジーを積極的に用いることにした。テクノロジーを用いることにすれば、現在高校2年以上で教えられている関数の微分・積分を利用することもできる。
4. 文字式やベクトルの単元など、これまでと違った特色をもった扱いをすることが難しい単元は今回省略した。



# 高校 数学 I

# 目次

---

## 第1単元 方程式と不等式 ..... 1

### 1節 数と式

### 2節 式と証明

### 3 不等式の証明と活用 2

### 3節 高次方程式

## 第2単元 いろいろな関数 ..... 7

### 1節 三角関数とその利用 8

### 2節 指数関数とその利用 16

### 3節 対数関数とその利用 31

### 4節 関数の値の変化 44

## 第3単元 ベクトル

## 第4単元 平面図形と式

## 第5単元 データの処理 ..... 61

### 1節 データ解析の基礎 62

### 2節 確率 78

のある内容は、この冊子に掲載されていないものを示します。

# 第1单元

---

## 方程式と不等式

### 3 不等式の証明と活用

#### ◆◆相加平均と相乗平均◆◆

#### 例題1 いろいろな平均

次の問に答えなさい。

- ① テストの結果、数学Ⅰが45点、数学Aが75点であった。平均は何点か。
- ② ある店の売り上げが、平成15年度は平成14年度の1.2倍、平成16年度は平成15年度の2.7倍になっていたという。この店の売り上げは、1年間で平均何倍になっているか。

<解答>

① 2つの教科の得点の平均であるから  $\frac{45+75}{2}=60$  (点)

② ①と同じように、 $\frac{1.2+2.7}{2}=1.95$  (倍) としては間違いである。

平成14年度から平成16年度までの2年間では  $1.2 \times 2.7$  倍の売り上げである。  
いま、1年間の平均倍率を  $r$  とすると、2年間での倍率は  $r^2$  倍である。

したがって  $r^2 = 1.2 \times 2.7$

$r > 0$  より  $r = \sqrt{1.2 \times 2.7} = 1.8$

したがって、1.8倍が1年間の平均倍率である。

例題1の①のように、2つの数  $a, b$  に対して

$$\frac{a+b}{2} \text{ を } a, b \text{ の 相加平均 (算術平均)}$$

といい、例題1の②のように、2つの数  $a, b$  ( $a > 0, b > 0$ ) に対して

$$\sqrt{ab} \text{ を } a, b \text{ の 相乗平均 (幾何平均)}$$

という。

平均を求める際には、状況に応じてどの平均を用いるのかを考えなければならない。



問1 次の2つの数の相加平均と相乗平均を、電卓を使って求め、それぞれを近似値で表しなさい。

① 20, 60

② 0.4, 1.8

③ 2.3, 30

## ◆◆相加平均と相乗平均の大小関係◆◆

**Q** 問1で求めた相加平均と相乗平均について、それらの大小関係にはどのような関係が成り立つと考えられるでしょうか。

相加平均と相乗平均の間には、一般に次のような大小関係がある。

### 相加平均と相乗平均の大小関係

$a > 0$ ,  $b > 0$  のとき、次の大小関係が成り立つ。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは  $a=b$  のときである。

この不等式が成り立つことを証明してみよう。このとき、実数について成り立つ次の性質を利用する。

### 実数の性質

- |   |                    |    |                                |
|---|--------------------|----|--------------------------------|
| 1 | $a^2 \geq 0$       | また | $a^2 = 0 \iff a = 0$           |
| 2 | $a^2 + b^2 \geq 0$ | また | $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$ |

相加平均と相乗平均の大小関係の証明は、次のようになる。

<証明>

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{ab} + b) \\ &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

ゆえに 
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

また、この不等式において等号が成り立つのは

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$$

したがって、 $a=b$  の場合である。

**問2** 次の不等式を証明しなさい。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

- ①  $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- ②  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
- ③  $a^2 + b^2 \geq ab$

**Q** 2つの正の数  $a, b$  を考えます。そして、この2つの数を分母とし、分子はこれらの数を入れ替えて2つの分数  $\frac{b}{a}, \frac{a}{b}$  をつくり、この2つの分数の和を求めます。

例えば、2つの正の数として5と9を考えたときは、できる2つの分数は  $\frac{9}{5}$  と  $\frac{5}{9}$  で、その和は

$$\frac{9}{5} + \frac{5}{9} \div 2.36$$

となり、2より大きくなります。

いろいろな2つの数を考え、上のようにして2つの分数をつくり、その和と2の大小の関係を調べてみましょう。

$$2 \text{ と } 5 \text{ のとき} \quad \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9 > 2$$

$$3 \text{ と } 20 \text{ のとき} \quad \frac{20}{3} + \frac{3}{20} \div 6.8 > 2$$

$$2.1 \text{ と } 2.2 \text{ のとき} \quad \frac{2.2}{2.1} + \frac{2.1}{2.2} \div 2.002 > 2$$

上の**Q**で調べたように、どんな2つの数で計算しても、分数の和が2より小さくなることはなかった。

どんな2つの正の数についても、上のようにつくった2つの分数の和が2より小さくなることはないのだろうか、考えてみよう。

## 例題2 相加平均と相乗平均の大小関係の活用

2つの正の数を考える。この2つの数を分母とし、分子はこれらの数を入れ替えた2つの分数をつくと、これらの分数の和は2よりも大きい。このことを証明しなさい。

<証明>

2つの正の数を  $x, y$  とする。このとき、できる2つの分数の和は  $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$  である。

相加平均と相乗平均の大小関係から

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \geq 2 \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}} = 2$$

したがって、どんな2つの正の数に対しても、2つの分数の和は2以上となる。

**問 3**  $x > 0$  のとき、 $x + \frac{3}{x}$  の最小値を求めよ、という問題に対し、次のように解答した。

相加平均と相乗平均の大小関係より

$$x + \frac{3}{x} \geq 2 \sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} = 2\sqrt{3}$$

したがって、最小値は  $2\sqrt{3}$  である。

この解答の誤りを指摘しなさい。

**練習 1** Aさんのクラスは文化祭でシューアイスの販売をすることになった。シューアイスは、隣の業者から仕入れ、車で運搬することにした。運搬中にアイスが溶けてしまうことを考慮し、発泡スチロールの容器も用意して、そこに詰めて運搬することにした。仕入れる量は、この容器で30杯分の量である。

ここで、1つの疑問にぶつかった。

発泡スチロールの容器の購入数を少なくすると、何回か往復して運搬しなくては  
ななくなり運搬料が高つく。逆に運搬料を少なくするためには、発泡スチロ  
ールの容器を多く購入しなければならない。

仕入れにかかる容器代と運搬量の合計を最も少なくするためには、発泡スチロールの  
容器はいくつ購入すればよいか。なお、発泡スチロールの容器は1つ450円で、運搬  
料は、仕入れ先との1往復で250円かかるとする。





# 第2単元

---

## いろいろな関数

## 第 1 節 三角関数とその利用

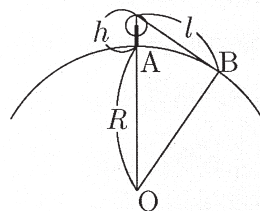
### 1 角の拡張

葛西臨海公園には、ダイヤと花の大観覧車とよばれる観覧車ある。この観覧車は、パンフレットなどで、下のように紹介されている。

この大観覧車に乗って地上 117m の上空から周囲を見渡すと、レインボーブリッジ、アクアラインの海ほたる、都庁、東京タワー、房総半島から富士山に至るまで関東の有名観光名所を一望でき、約 17 分間の空中散歩を楽しむことができます。

**??** 上で紹介されているように、本当に海ほたるは見ることができるのだろうか。また、見ることができた場合、どのくらいの時間見ることができるのだろうか。さらに、房総半島も一望できるようだが、観覧車が最も高くなる地上 117m から房総半島のどの範囲まで見ることができるのだろうか。

**問 1** 地図帳を用いて、葛西臨海公園の地上 117m から見ることができる範囲はどこまでか求めなさい。それをもとに、地上 117m から海ほたるは見るか答えなさい。ただし、地球の半径は 6,378km、観覧車から海ほたるまでの距離は約 20km である。また、この結果をもとに、房総半島のどの範囲まで見渡せることができるか答えなさい。



問 1 では、本来  $\widehat{AB}$  の長さを求めなければならないが、 $l$  との差は僅かであるから、 $l$  をもとに考えても十分である。

この結果から、地上 117m 地点から見える範囲を地図で調べると、房総半島の富津岬あたりが見える限界であることがわかる。

**問2** 地上 117m の地点から確かに海ほたるが見えることは分かったが、では、観覧車で地上何 m まで上がったら、海ほたるを見ることができるか。

**練習1** 東京タワーの2階大展望台(150m)と特別展望台(250m)からは、それぞれの範囲まで見渡すことができるか。地球の半径を 6,378km として、地図に図示しなさい。  
ただし、この展望台の高さは地上からの高さではなく、標高を表している。



## ◆◆一般角◆◆

ダイヤと花の大観覧車のデータは、次のようであった。

地上高	117m	定員	6人乗り×68台
回転輪直径	111m	所要時間	約17分

**??** 上のデータをもとに、この観覧車のあるゴンドラの位置について考えてみよう。

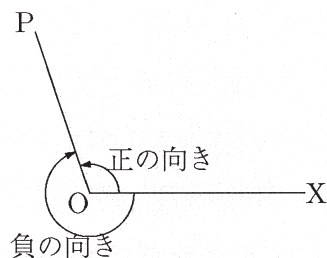
**問3** この観覧車は、1分間ではどのくらい回転するか。さらに同じゴンドラに1時間乗り続けたとき、そのゴンドラは何回転するか。

平面上で、半直線  $OP$  を、点  $O$  を中心として回転させたときの回転の量について考えてみよう。

この回転の量は、はじめの位置にある半直線  $OX$  上にあった半直線  $OP$  が、点  $O$  のまわりを回転してできた量である。

このとき、半直線  $OX$  を **始線**、半直線  $OP$  を **動径** という。

回転には2つの向きがあり、時計の針の回転と反対の向きを **正の向き**、時計の針と同じ向きを **負の向き** という。



この観覧車の60分間での回転の量は、約  $1271^\circ$  であるから

$$1271 = 191 + 360 \times 3$$

と表すことができる。

これは60分間に3回転してさらに  $191^\circ$  回転したものであり、位置としては  $191^\circ$  回転したときと同じである。

一般に、角の大きさ  $\theta$  はいろいろ考えられるが、 $\angle XOP$  の大きさの1つを  $\alpha$  とするとき、整数  $n$  を用いて、すべて

$$\theta = \alpha + 360^\circ \times n$$

の形で表される。これを、動径  $OP$  の表す **一般角** という。

## 2 三角関数とそのグラフ

?? 観覧車の1つのゴンドラの回転角とそのときの高さを式で表すことはできないだろうか。

### ◆◆三角関数◆◆

座標平面上で、右の図のように  $x$  軸の正の部分に始線を取り、角  $\theta$  の動径と原点を中心とする半径  $r$  の円との交点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする。

このとき、 $\frac{y}{r}$ ,  $\frac{x}{r}$ ,  $\frac{y}{x}$  の値はどれも円の半径  $r$  には関係なく、 $\theta$  だけで決まる。

したがって、 $\theta$  の関数である。これらを  $\theta$  の **三角関数** とよび、次のように表す。

$$\sin\theta = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

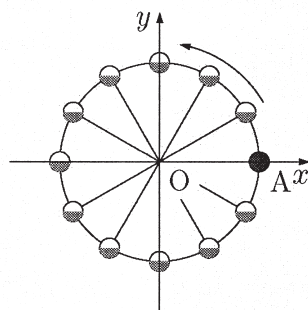
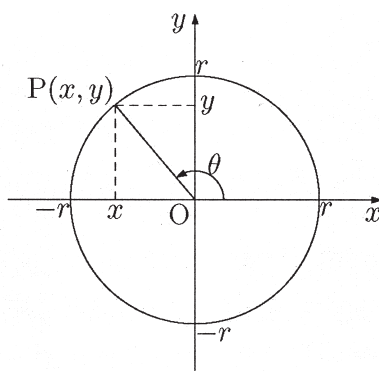
これらをそれぞれ、一般角  $\theta$  の**正弦**、**余弦**、**正接**という。  
 $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$ ,  $\tan\theta$  をまとめて、 $\theta$  の **三角関数** という。

●注意  $x=0$  となるような  $\theta$  に対しては、 $\tan\theta$  は定義されない。

**問1** 右の図のように、回転輪の中心を原点  $O$  として座標軸を設定する。

このとき、ゴンドラ  $A$  の回転した角度を  $\theta$ 、そのときのゴンドラ  $A$  の高さを  $y$  とする。 $y$  を  $\theta$  の式で表し、次の回転角のときの原点からの高さを求めなさい。

- ①  $30^\circ$                       ②  $90^\circ$   
 ③  $945^\circ$                     ④  $-60^\circ$



## ◆◆三角関数のグラフ◆◆

?? 地上に原点を設定したとき、回転角  $\theta$  と地上からの高さ  $y$  との関係を表す関数のグラフはどんな形になるだろうか。

▶▶まず、回転輪の中心を原点に設定したときの式とそのグラフを考えてみよう。

原点を中心とする半径 1 の円を **単位円** という。

角  $\theta$  の動径と単位円の交点を  $P(x, y)$  とすると、三角関数の定義により

$$y = \sin\theta, \quad x = \cos\theta$$

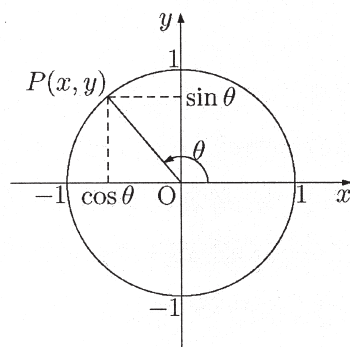
となる。ここで、 $-1 \leq y \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  であるから

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

となる。まとめると

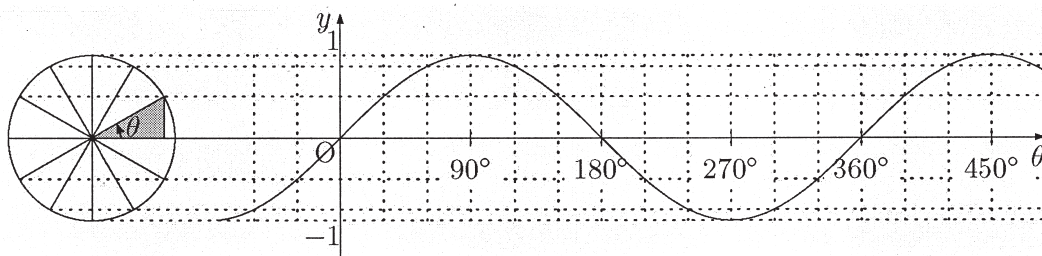
①  $\sin\theta$  の値は、P の  $y$  座標に等しい。

②  $\cos\theta$  の値は、P の  $x$  座標に等しい。

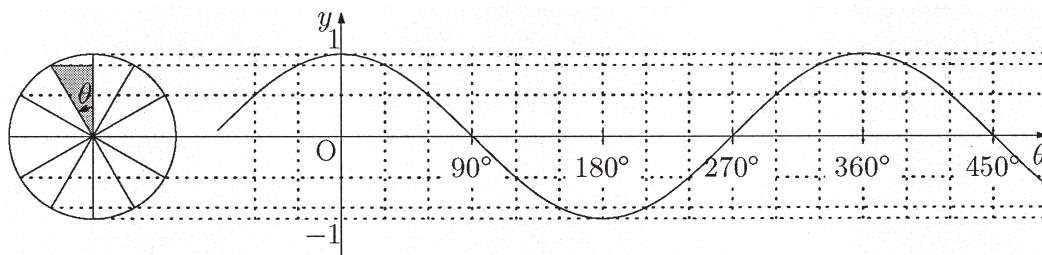


このことを使って関数  $y = \sin\theta$ ,  $y = \cos\theta$  のグラフをかくと、次のようになる。

< $y = \sin\theta$  のグラフ>



< $y = \cos\theta$  のグラフ>



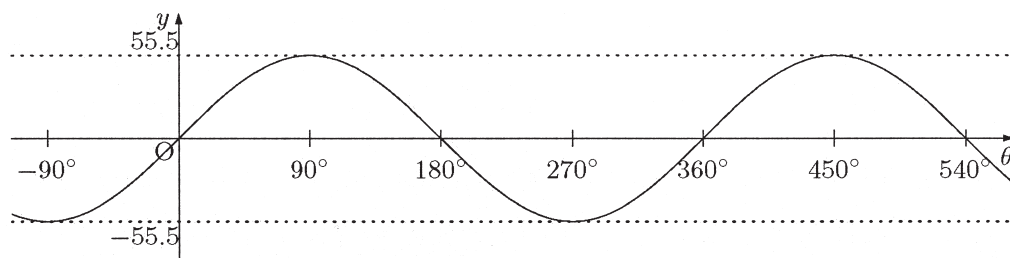
動径は 1 回転すると元の位置に戻るから、次のことが成り立つ。

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 360^\circ) = \cos\theta$$

この性質から、 $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$  は  $360^\circ$  の **周期** をもつという。



この観覧車は、回転輪の直径が 111m であるから、半径は 55.5m である。したがって、回転輪の中心を原点に設定したとき、回転角を  $\theta$  とすると、高さ  $y$  は  $y=55.5\sin\theta$  と表すことができる。この関数のグラフは、 $y=\sin\theta$  のグラフを、 $y$  軸方向へ 55.5 倍に拡大したものであるから、次のようになる。



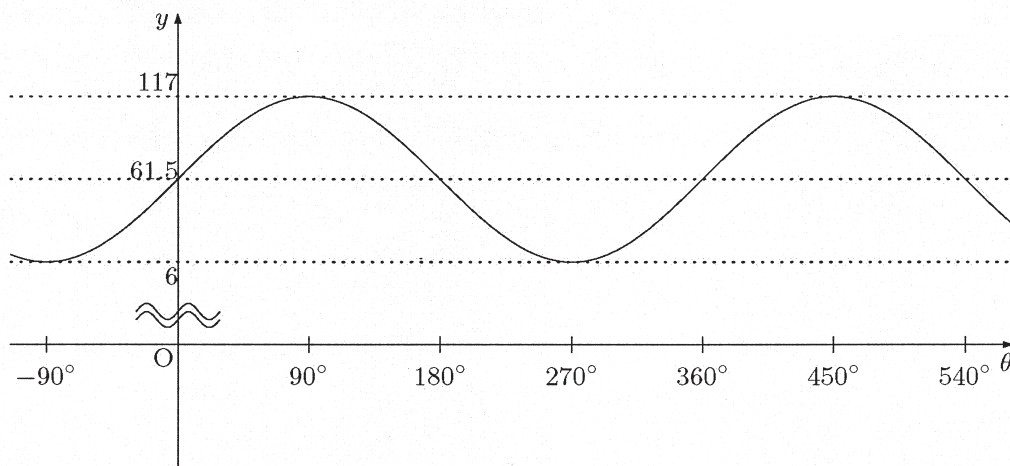
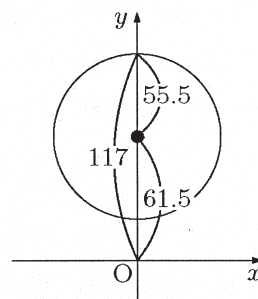
▶▶次に、地上に原点を設定したときの式とそのグラフを考えてみよう。

データから、地上高 117m、回転輪直径 111m であるから、右の図より回転輪の中心は地上から 61.5m のところにある。

したがって、回転輪の中心に原点を設定したときよりも  $y$  座標は 61.5 だけ大きくなっているため、その式は

$$y = 55.5\sin\theta + 61.5$$

となる。この関数のグラフは、 $y=55.5\sin\theta$  のグラフを  $y$  軸の正の方向に 61.5 だけ平行移動したものであるから、そのグラフは次のようになる。



**問2** 次の関数のグラフをかきなさい。

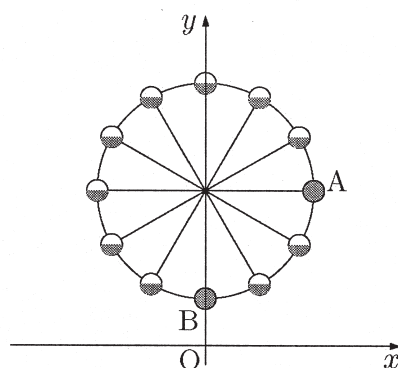
①  $y = 2\sin\theta$

②  $y = 4\cos\theta$

③  $y = -\sin\theta + 4$

④  $y = -2\cos\theta - 2$

**??** 今までゴンドラ A の高さの変化を考察したが、乗降口であるゴンドラ B に注目して、ゴンドラ B の高さを回転角  $\theta$  の関数として表すとどうなるだろうか。また、そのグラフはどのような形になるだろうか。



▶▶ 式とそのグラフを考えてみよう。

ゴンドラ A に比べると、ゴンドラ B は回転角で  $90^\circ$  だけ遅れている。したがって、ゴンドラ B の高さを  $y$  とすると、その高さは

$$y = 55.5\sin(\theta - 90^\circ) + 61.5$$

と表すことができる。

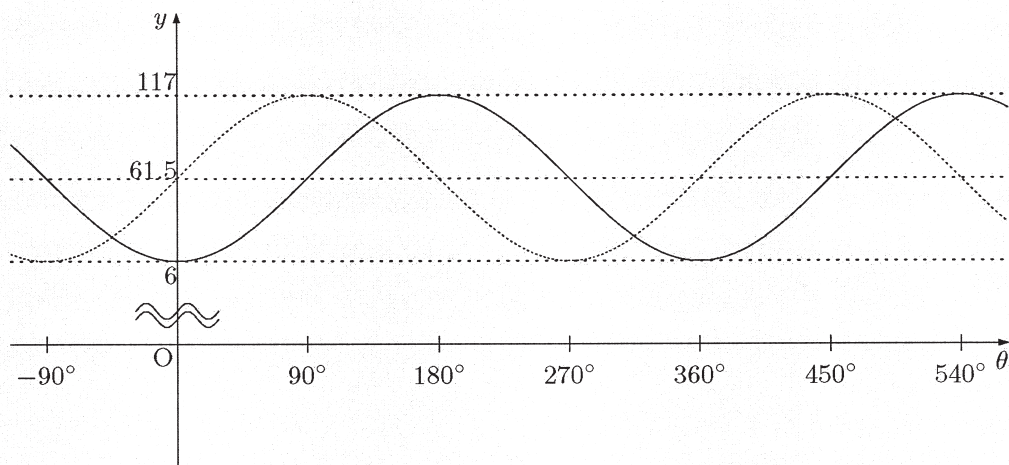
これは、 $y = 55.5\sin\theta + 61.5$  のグラフを  $\theta$  軸の正の方向に  $90^\circ$  だけ平行移動したものである。したがって、グラフは次のようになる。

下の図で

実線が  $y = 55.5\sin(\theta - 90^\circ) + 61.5$  のグラフ

点線が  $y = 55.5\sin\theta + 61.5$  のグラフ

をそれぞれ表している。



**問3** 次の三角関数のグラフをかきなさい。

①  $y = 2\sin(\theta - 30^\circ)$

②  $y = -2\cos(\theta + 60^\circ)$

③  $y = 4\cos(\theta + 90^\circ)$

④  $y = -\sin(\theta - 120^\circ)$

**??** 乗降口であるゴンドラ B に乗ったとき、観覧車から約 20km 離れた海ほたるを見ることができるのはどのくらいの時間だろうか。

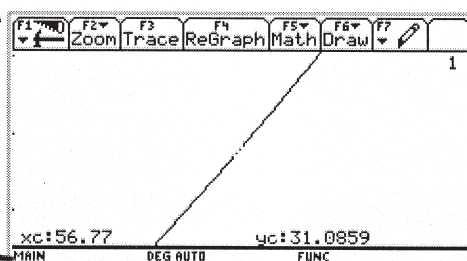
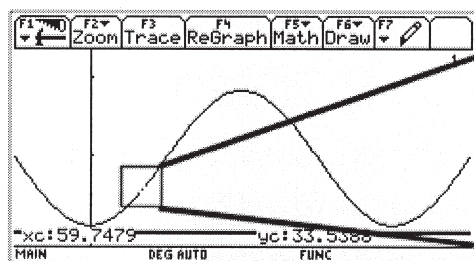
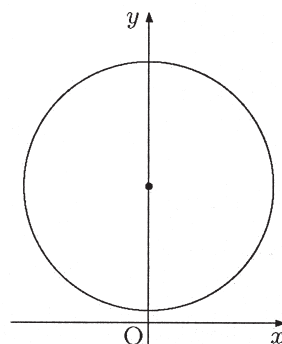
**問 4** ゴンドラ B の高さを表す関数は

$$y = 55.5\sin(\theta - 90^\circ) + 61.5$$

であった。

また、海ほたるが見えるのは地上 31m 以上であった。

これらをもとに、グラフ電卓を活用し、海ほたるが見える範囲を、右の図に書き込みなさい。



**問 5** 問 4 をもとに、海ほたるを見ることができる時間は何分間であることを求めなさい。

## 第2節 指数関数とその利用

---

小型サイズも普及したペットボトル飲料は、ふたが閉められて持ち歩きに便利  
なため、暑い季節の外出時には、多くの人が利用する。

ある暑い日のこと。Aさんは登校時にペットボトル飲料を買い、半分ほど飲ん  
だ後、鞆に入れたままにした。下校時に、なまぬるいながらも残りを飲みほした。  
その翌日、Aさんはおなかをこわしてしまった。

?? ペットボトル飲料の多くに、「開栓後は冷蔵庫で保存し、お早めにお飲みくださ  
い。」という注意書きがある。しかし、「開栓前は冷蔵庫に入れて保存しなくてもよ  
いだから、半日くらい冷蔵庫に入れなくて大丈夫だろう。」と考えている人も少な  
くない。実際はどうなのだろう。

▶▶ どんな実験をすればよいかを考えよう。

静岡県環境衛生科学研究所の報告によれば、開  
栓しても、口をつけなかったペットボトルの、1ml  
あたりの生菌数は 0~1 で、その 3 日後も変わら  
なかった。一方、表 1 は、実際に、ペットボトル  
の緑茶を、口をつけて半分まで飲んだ直後の、ペ  
ットボトル内の生菌数である。

表 1 飲用直後の一般生菌数

検体	生菌数 (個/ml)
A	63
B	273
C	133
D	34
E	1120
F	111
G	830
H	57

▶▶ ペットボトル内の雑菌の増え方について考えてみよう。

微生物学の本には、次のように書かれている。

微生物の生育は、温度、湿度、栄養、酸素などの、諸条件が好適な場合には、非常に  
早い。細菌の生育速度（あるいは分裂速度）は、1 個の細胞が分裂を始めて 2 個にな  
るまでの時間、すなわち generation time (G) で表される。

この generation time は増殖が早いほど小さい値となる。大腸菌や乳酸桿菌では、  
G = 20 分くらいであるが、特別に好適な培養基では 15 分くらいに短縮される。

(天羽幹夫・小石川仁治 (1995) 「改稿 栄養士のための応用微生物学」光生館)

気温 30℃での 細菌の生育速度(分裂速度)が 30 分であるとする。前ページの表 1 の検体 A について、生菌数の増え方を調べてみよう。

時間	生菌数(個/ml)
0	63
0.5	126
1	252
1.5	504
2	1008

6 時間後だと、どのくらいかな？



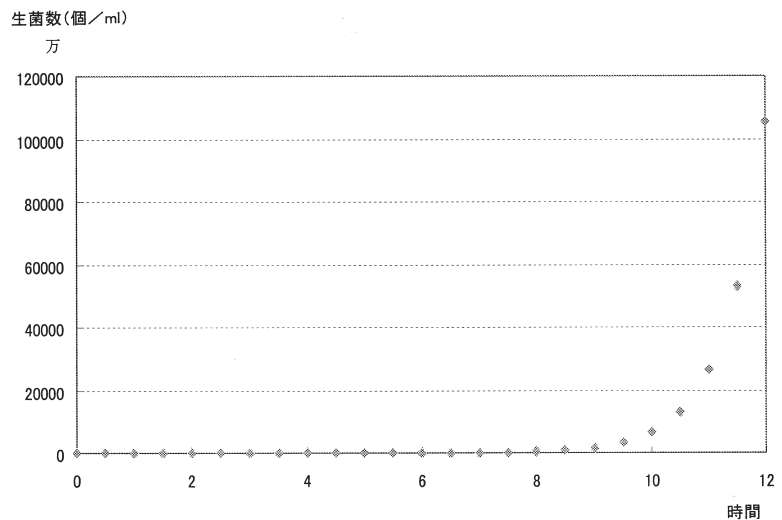
**問 1** グラフ電卓や表計算ソフトを利用して、各時間の 1ml あたりの生菌数を求めなさい。  
また、生菌数の変化のようすを表すグラフをかきなさい。

	A	B
1	時間	生菌数(個/ml)
2	0	63
3	0.5	$=B2 * 2$
4	1	$=B3 * 2$
5	1.5	$=B4 * 2$
6	2	$=B5 * 2$

「1つ上のセルの値の 2 倍になる」ということを式にすればいいね。



**問 2** 半日間の菌数の変化をグラフに表すと、右のようになる。  
下の空らんにあてはまる文章を入れなさい。

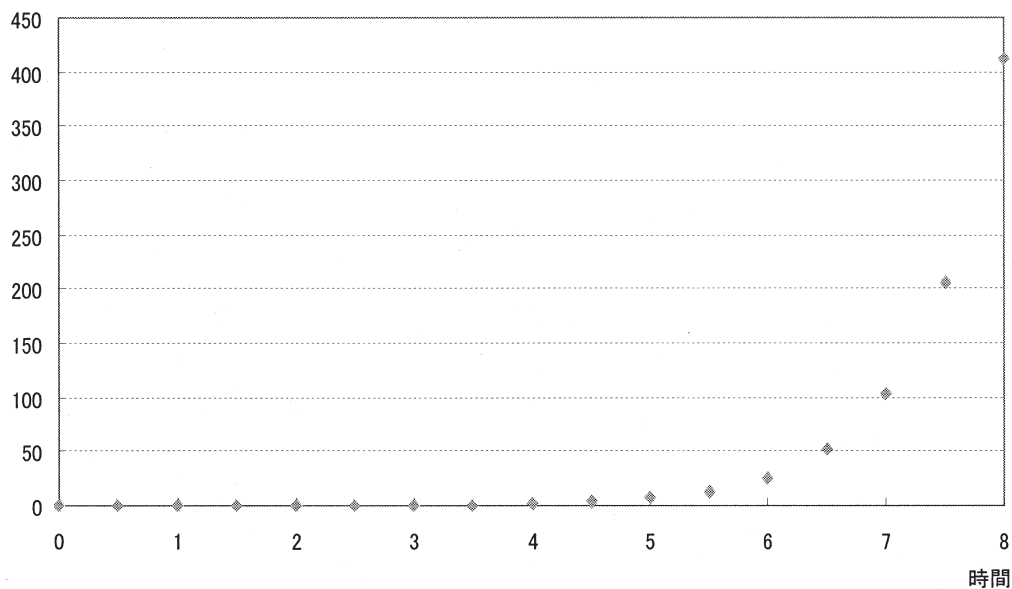


- ① グラフ全体を見てわかることは、
- ② 8 時間後までは、
- 8 時間後からは、

8 時間後までと、8 時間後からの変化のようすを、別々のグラフに表示すると次のようになる。

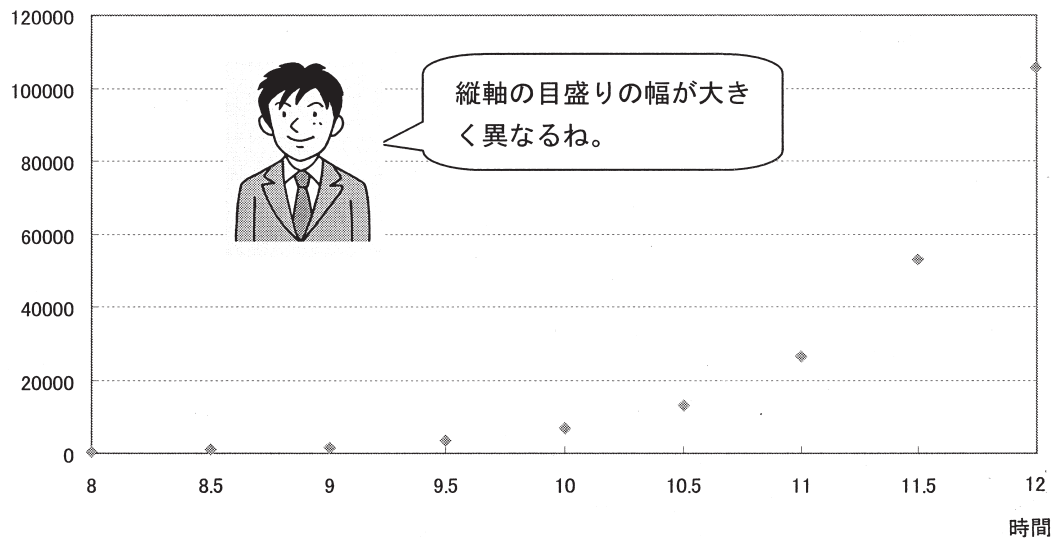
生菌数(個/ml)

万



生菌数(個/ml)

万



**問 3** 16 ページの表 1 をもとに、検体 A 以外のペットボトルの生菌数の変化のようすを表すグラフをかきなさい。

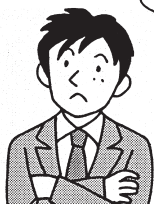
▶▶時間を  $x$ , 1ml あたりの生菌数を  $y$  として, 検体 A について,  $y$  を  $x$  の式で表してみよう。

0.5 時間後	$63 \times 2$
1 時間後	$63 \times 2 \times 2$
1.5 時間後	$63 \times 2 \times 2 \times 2$
2 時間後	$63 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
⋮	
$x$ 時間後	$63 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$

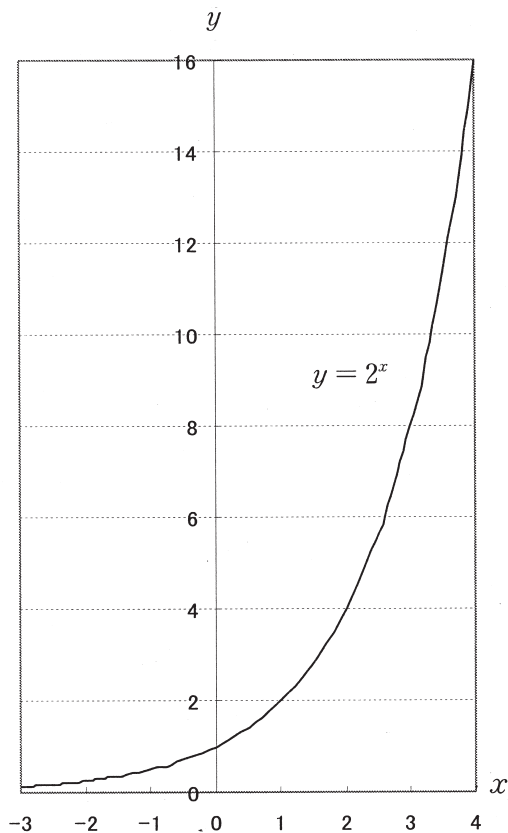
したがって,  $x$  時間後の生菌数  $y$  は  $y = 63 \times 2^{2x}$  と表すことができる。

**問 4** 検体 A 以外のペットボトルの,  $x$  時間後の生菌数  $y$  を表す式をつくりなさい。

**問 5** 右のグラフは  $y = 2^x$  のグラフである。このグラフを見て, 気づいたことをいいなさい。



$2^{-1}$ ,  $2^{0.5}$  って, 何を表すのかな?



**問 6** グラフ電卓などで,  $y = 2^x$  と  $y = 2 \times 2^x$ ,  $y = 3 \times 2^x$  のグラフを表示しなさい。それらを比較し, 気づいたことをいいなさい。



▶▶  $y=2^x$  で、 $x=0$  や  $x=1$ 、 $x=\frac{1}{2}$  のときの、 $y$  の値の意味を考えてみよう。

1 指数が 0 や負の数の場合

$$2^4 = 16$$

$$2^3 = 8$$

$$2^2 = 4$$

$$2^1 = 2$$

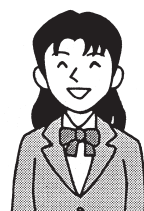
$$2^0 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$2^{-1} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$2^{-2} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$2^{-3} = \boxed{\phantom{00}}$$

$y=63 \times 2^{2x}$  で  
 $x=0$  のとき、 $y=63$   
 だったわ。



同様に考えて

$$a^0 = \boxed{\phantom{00}}$$

$$a^{-1} = \boxed{\phantom{00}}$$

$$a^{-2} = \boxed{\phantom{00}}$$

⋮

であり、一般に、 $a \neq 0$  で、 $n$  が正の整数のとき、次のことが成り立つ。

$a^0, a^{-n}$  の定義

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

2 指数が分数や小数の場合

指数が整数のとき

$$(2^3)^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$

$$= 2^{3 \times 4}$$

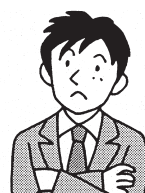
$$= 2^{12}$$

のように

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \dots\dots (1)$$

が成り立つ。

$2^1=2$ ,  $2^0=1$  だから,  
 $2^{\frac{1}{2}}=1.5$  かな?



そこで、同様に、指数が実数の場合も (1) が成り立つと考えることにする。

このとき

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2$$

なので、 $2^{\frac{1}{2}}$  は 2 乗すると 2 になる数であることがわかる。すなわち

$$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

次に、 $2^{0.3}$  がどんな値と等しいかを考えてみよう。

$$2^{0.3} = 2^{\frac{3}{10}}$$

であるから

$$\left(2^{0.3}\right)^{10} = \left(2^{\frac{3}{10}}\right)^{10} = 2^3 = 8$$

したがって、 $2^{0.3}$  は「10 乗して 8 になる数」であることがわかる。この数を  $\sqrt[10]{8}$  と書くこともある。

一般に、 $a > 0$  で、 $m$  が整数、 $n$  が正の整数のとき、次のことが成り立つ。

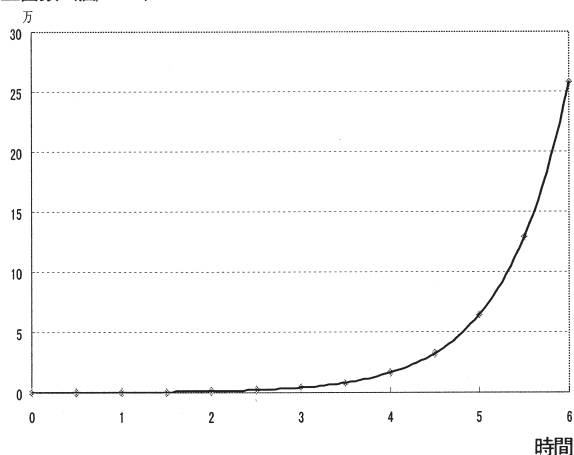
### 分数を指数とする累乗

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

菌は、30 分ごとに一齐に増えるわけではない。そこで、30 分間に、菌の数が徐々に増えていると考えれば、その間の菌のおよその数を推測することにも意味がある。

**問 7** 検体 A のペットボトルの 3.1 時間後の生菌数を、根号を用いて表しなさい。

生菌数 (個/ml)



- 問 8** 17 ページでは、生育速度を 30 分と仮定した。生育速度を、15 分、60 分と変えたときのグラフを、グラフ電卓などで表示しなさい。それらを比較し、気づいたことをいいなさい。

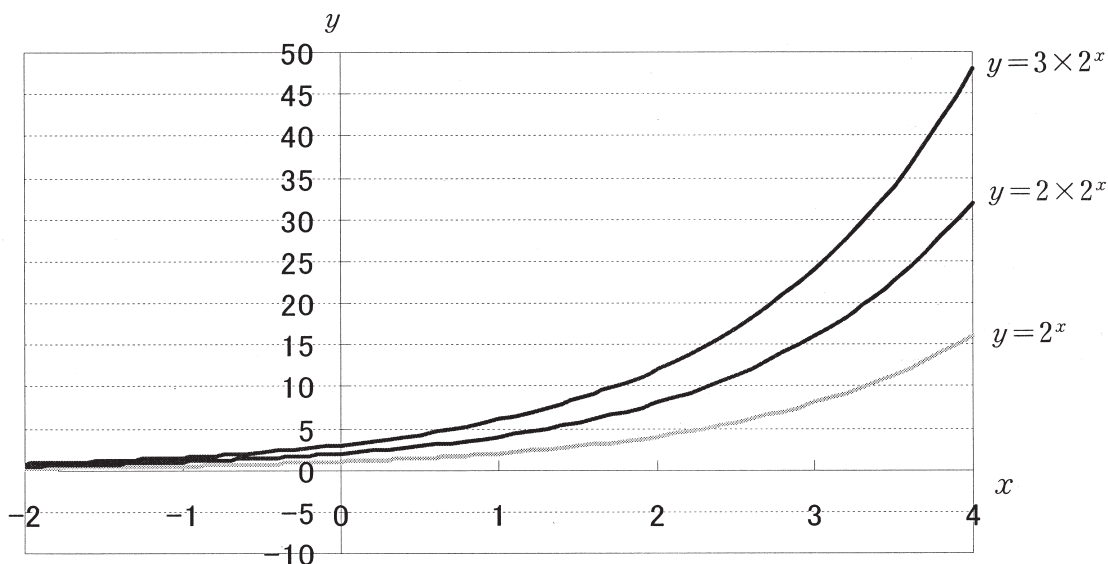
### 指数関数

$a \neq 0, b \neq 0, b \neq 1, b > 0$  のとき

$$y = a \times b^x$$

で表される関数を、 $b$  を底とする**指数関数**という。

問 6 で調べたように、 $y = 2^x$ 、 $y = 2 \times 2^x$ 、 $y = 3 \times 2^x$  のグラフと表は、次のようになっている。



$x$	$y = 2^x$	$y = 2 \times 2^x$	$y = 3 \times 2^x$
-3	0.125	0.25	0.375
-2	0.25	0.5	0.75
-1	0.5	1	1.5
0	1	2	3
1	2	4	6
2	4	8	12
3	8	16	24
4	16	32	48

**問 9** グラフ電卓などを用いて、次の指数関数のグラフを表示し、その関係を調べてみなさい。

①  $y=2^x$ ,  $y=2^{\frac{x}{2}}$ ,  $y=2^{\frac{x}{3}}$

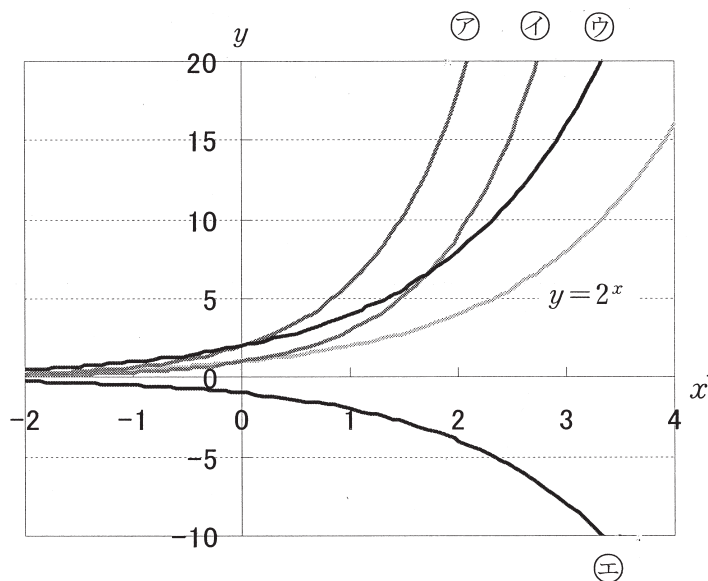
②  $y=1.5^x$ ,  $y=2^x$ ,  $y=4^x$

**問 10** 次の関数のグラフを、下の㉠～㉥の中から選び、記号で答えなさい。

①  $y=3^x$

②  $y=2 \times 3^x$

③  $y=-2^x$



**問 11** 菌は、最初の2～4時間は増殖の準備をしている期間で、増殖はほとんど起こらないという。そこで、検体 A のペットボトルの菌の増殖が2時間後から起こるとする。生育速度が30分のとき、時間を  $x$  として、生菌数  $y$  を表す式をつくりなさい。また、そのグラフの概形をかきなさい。

薬を飲む時間は薬によって異なる。毎食後に服用するものもあれば、何時間おきと時間を決めて服用するものもある。

ある日、かぜをひいた Aさんは、薬局で、8時間ごとに飲む薬と毎食後に飲む薬を渡された。

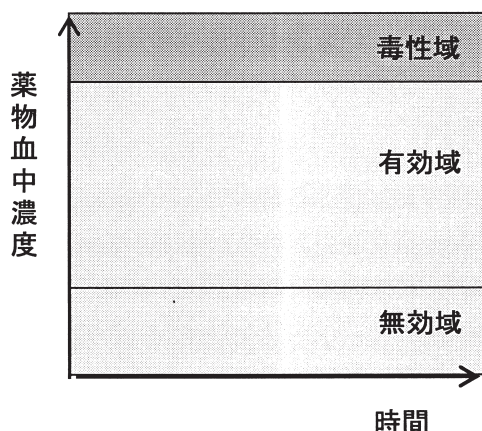
「どちらも1日3回飲むのは同じなのに……。どうして、飲む時間を変えなくてはいけなのかなー。」

**??** 「8時間おき」と言われても、実際は、もっと間隔をあけてしまったという経験のある人も少なくないだろう。薬の効き目は違うのか、考えてみよう。

飲み薬のほとんどは、薬が水に溶け、胃や腸で吸収されて効果を示す。徐々に薬が体の中で溶け、吸収が増加していくと、血液中の薬物濃度が増加していき、ある一定値を超えると薬の作用が出てくる。したがって、薬が作用しているかどうかは、その「血中濃度」で判断できる。薬の作用が出始めてから毒性が出始めるまでの血中濃度の範囲を有効域と呼んでいる。

また、薬を飲んだら薬が吸収される一方、体は薬を代謝(分解)、排泄していく。よって薬を服用すると、ある一定値まで薬の血中濃度は増加するが、その後は低下していく。

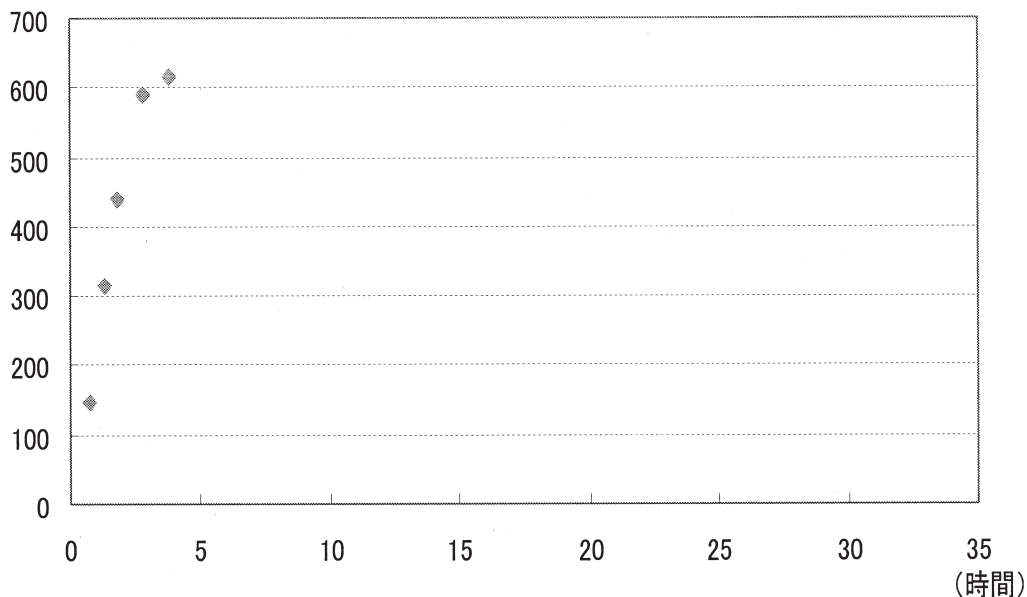
▶▶ 右の表は、ある薬の服用後の時間と血中濃度である。血中濃度は、時間とともにどのように変化しているか、調べてみよう。



時間	血中濃度 (ng/ml)
0.72	145
1.3	315
1.8	440
2.8	590
3.8	615
4.8	590
5.8	560
7.8	412
9.8	295
12	225
24	65
32	24

- 問 12** 下の点は、前ページの表の、時間が 0.72 から 3.8 までのときの血中濃度を表している。続けて点を取り、グラフを完成させなさい。そして、血中濃度の下がり方の特徴をことばで説明しなさい。

血中濃度 (ng/ml)



- 問 13** 薬学の世界では、薬の血中濃度は一定の比率で減少すると仮定して考えている。このとき、次の問に答えなさい。

- ① 前のページの薬の場合、血中濃度が減少する比率はいくつくらいかを見積もりなさい。
- ② ①の値を用いて、6.8 時間後、8.8 時間後の血中濃度を求めなさい。
- ③  $x$  時間後の血中濃度  $y$  を求めなさい。
- ④ ③の式を用いて、10 時間後の血中濃度を求めなさい。

医薬品は、有効成分や効用、安全性をはじめとする、さまざまな項目について、詳細に届け出がなされている。

- 問 14** 下の表は、ある痛み止めの錠剤に関するデータである。次の問に答えなさい。  
ただし、データの意味については、脚注を参考にすること。

最高血中濃度到達時間 Tmax [hr]	最高血中濃度Cmax [ng/ml]	生物学的半減期 $T_{1/2}$ [hr]
2.72±0.55	415±57	1.2

- ① この錠剤の半減期は 1.2 時間である。血中濃度が一定の比率で減少するとき、1 時間ごとの減少の比率を小数第 1 位までの値で見積もりなさい。
- ② 最高血中濃度到達後の時間を  $x$  として、血中濃度  $y$  の変化を表すグラフを、グラフ電卓などを用いてかきなさい。
- ③ 一般に、血中濃度は投与量に比例する。この錠剤を 2 錠投与した場合のグラフをかきなさい。

- 問 15** 問 14 の痛み止め薬には、錠剤以外にカプセルタイプものがある。下の表はカプセルタイプのデータである。次の問に答えなさい。

最高血中濃度到達時間 Tmax [hr]	最高血中濃度Cmax [ng/ml]	生物学的半減期 $T_{1/2}$ [hr]
7.0±1.0	416.5±44.2	1.51±0.38

- ① この薬の半減期が 1.89 時間のとき、1 時間ごとの減少の比率を小数第 1 位までの値で見積もりなさい。
- ② 最高血中濃度到達後の時間を  $x$  として、血中濃度  $y$  の変化を表すグラフを、グラフ電卓などを用いてかきなさい、
- ③ この痛み止めの薬の、錠剤とカプセルタイプについて、血中濃度の変化の違いの特徴を説明しなさい。

---

問 14, 15 の表で、最高血中濃度 (Cmax)、最高血中濃度到達時間 (Tmax)、生物学的半減期 ( $T_{1/2}$ ) とは、それぞれ次のことである。

最高血中濃度 (Cmax) : 薬物投与後に得られた最高血中濃度

最高血中濃度到達時間 (Tmax) : 最高血中濃度に達するまでの時間

生物学的半減期 ( $T_{1/2}$ ) : 最高血中濃度到達後、その濃度が  $\frac{1}{2}$  に減少するまでに要する時間

薬の血中濃度の減り方は、指数関数  $y=a \times b^x$  において、 $0 < b < 1$  の場合である。

**問 16** グラフ電卓などを用いて、次の指数関数のグラフを表示し、①、②それぞれについて、その関係を調べなさい。

①  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = 2^x$ ,  $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = -2^x$

②  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

**問 17** グラフ電卓などで、次の関数のグラフをかき、それらを比較して、気づいたことをいいなさい。

$y = 2^x$ ,  $y = 2 \times 2^x$ ,  $y = 3 \times 2^x$   
のグラフの関係はどうだったかな。



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ,  $y = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$

**問 18** 右の関数のグラフ I ~ IV にあてはまる表と式を、それぞれ答えなさい。ただし、グラフ電卓などを用いないこと。

A

$x$	1	2	3	4
$y$	40	16	6.4	2.56

B

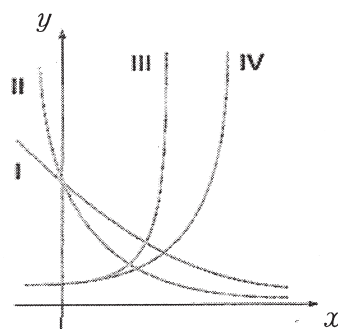
$x$	1	2	3	4
$y$	30	90	270	810

C

$x$	1	2	3	4
$y$	60	36	21.6	12.96

D

$x$	1	2	3	4
$y$	20	40	80	160



ア  $y = 100 \times 0.6^x$

イ  $y = 100 \times 0.4^x$

ウ  $y = 10 \times 2^x$

オ  $y = 10 \times 3^x$



▶▶問 14, 問 15 の痛み止めの薬の、錠剤とカプセルタイプについて、服用後の時間を  $x$  として、最高血中濃度到達後の血中濃度の変化を表すグラフを、グラフ電卓などを用いてかき、それぞれの薬の長所と短所を調べてみよう。

服用後の時間を  $x$  としたグラフは、問 14 ②, 問 15 ② でかいたグラフを、 $x$  軸方向に平行移動すればよい。

**問 19**  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  を、 $x$  軸方向に  $+1$  だけ平行移動したグラフの式を求めなさい。

また、このグラフと  $y = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$  のグラフとの関係を説明しなさい。

**問 20** 薬の中には、食後に飲むのと空腹時に飲むのとでは、最高血中濃度 (Cmax)、最高血中濃度到達時間 (Tmax) が大きく異なるものがある。下の表は、ある薬の食後と空腹時に服用したときのデータである。食後と空腹時のそれぞれの場合について、服用後の時間を  $x$  として、最高血中濃度到達後の血中濃度の変化を表すグラフを、グラフ電卓などを用いてかきなさい。

服用時間	最高血中濃度到達時間 Tmax [hr]	最高血中濃度 Cmax [ng/ml]	生物学的半減期 T <sub>1/2</sub> [hr]
食後	3.0±0.8	149±55.6	3.26±0.88
空腹時	1.2±1.5	255±116	3.35±1.72

薬の効果を持続するには、薬の血中濃度が、薬が有効に効く範囲(有効域)から低下し、薬が効かなくなる範囲(無効域)に入る前に、再度薬を飲まなければならない。すなわち、血中濃度が無効域まで低下している時間がないようにしなければならない。

**問 21** 問 14 の錠剤の無効域が血中濃度 100 ng/ml 以下だとすると、およそ何時間おきに服用すればよいか。

## 数学のまど      抗生物質

---

抗生物質は、特に血中濃度が重要です。抗生物質は血中濃度を有効域に入ること、体を侵している菌を殺します。しかし、有効域に血中濃度が入ったら菌が全滅するわけではなく、数日間は有効域にしておかないと、菌は死滅しません。菌は遺伝子の作りが単純であり、増殖が早いため、周りの環境にすぐに適応します。抗生物質を服用していても、菌が死滅しないうちに血中濃度が無効域に落ちると、菌が再活動しはじめ、抗生物質に適応（耐性化）してしまいます。この耐性化は現在、大きな問題になっており、新しい抗生物質ができて、それに耐性化した菌がすぐに現れています。菌の耐性化を防ぐには、できるだけ抗生物質を使用しないことと、使用するのであれば菌が死滅するまでしっかり服用することが大切です。

参考：<http://www.kusuri-web.com/kiso/kiso4.html>

## 数学のまど      消失速度定数

---

血中濃度が減少する比率は、この章では、半減期の値をもとに、グラフ電卓等を用いて、試行錯誤的に求めました。実は、この血中濃度が減少する比率は、消失速度定数（Kel）と呼ばれ、次の式で求めることができます。

$$Kel = \frac{0.693}{T_{1/2}} \quad T_{1/2} : \text{生物学的半減期}$$

なぜ、この式で求めることができるかについては、第3節「対数関数とその利用」を学習したときに、あらためて考えてみましょう。

## やってみよう！ ドーピング

オリンピックをはじめ、各種のスポーツ大会では、ドーピングに関する検査が欠かせないものとなっている。

風邪薬などの一般的な薬にも禁止物質が含まれている場合がある。禁止物質の含まれている薬を、そうとは知らずに飲んでしまったとき、その薬が体内からなくなるまでに、どれくらいの時間がかかるか考えてみよう。

**問 1** 下の表の薬の場合、血中濃度が 10ng/ml になるのは、服用何時間後か。

薬	最高血中濃度到達時間 $T_{\max}$ [hr]	最高血中濃度 $C_{\max}$ [ng/ml]	生物学的半減期 $T_{1/2}$ [hr]
A	6.0	400	8
B	6.0	400	12

⇒⇒ 医師や薬剤師の間では「血中濃度の消失時間は半減期の 4 ～ 5 倍」と言われている。どのような薬に対してもこのことがいえるかどうか、探求しなさい。

⇒⇒ ある錠剤の添付文書には、「連続投与したときの血中濃度半減期は約 25 時間」とある。この薬は 1 日 1 回投与される薬である。10 日目までの各日の最高血中濃度、最低血中濃度を調べなさい。ただし、最高血中濃度到達時間は 1.0 [hr]，最高血中濃度は 120.0 [ng/ml] とする。

## 第3節 対数関数とその利用

### 1 逆関数

横浜・八景島シーパラダイスには、ブルーフォールと呼ばれる垂直落下型の乗り物がある。この乗り物は、地上 100m の高さから落下した直後に一旦減速し、その後再び急降下する。地上のある高さから物体を初速度 0 で落とすと、物体は下向きに速さを増しながら落下していく。空気の抵抗が無視できる場合、この落下運動を自由落下と呼ぶ。ブルーフォールは、この自由落下のスリル感を楽しむ乗り物である。

**??** 物体が自由落下したとき、落ち始めてからの時間  $t$  と速度  $v$ 、落ち始めてからの時間  $t$  と落下距離  $s$  との間には、それぞれどんな関係があるか、調べてみよう。

物体が自由落下するときについて、下の表 1 は、落ち始めてからの時間と速度の関係、表 2 は、落ち始めてからの時間と落下距離の関係を、それぞれ示している。

時間 $t$ (秒)	速度 $v$ (m/秒)
0	0
0.5	4.9
1	9.8
1.5	14.7
2	19.6
2.5	24.5
3	29.4
3.5	34.3
4	39.2

表 1

時間 $t$ (秒)	落下距離 $s$ (m)
0	0
0.5	1.225
1	4.9
1.5	11.025
2	19.6
2.5	30.625
3	44.1
3.5	60.025
4	78.4

表 2

2 つの変数  $x$ ,  $y$  の間にある関係のうち、 $x$  の 1 つの値に対して、つねに  $y$  の値が 1 つ決まるという関係があるとき、 $y$  は  $x$  の関数であるといいます。

**問 1** 速度  $v$  は、時間  $t$  の関数であるといえるか。速度が時間の関数である場合、 $v$  を  $t$  を用いて表しなさい。

**問2** ブルーフォールでは、カメラや携帯電話は落下防止のために持ち込みが禁止されている。もし、誤って100mの高さから携帯電話を落としたとしたら、地面にぶつかる時の速度は時速何kmか。

**問3** 表1で、時間と速度の列を入れ替えたとき、時間は速度の関数であるといえるか。時間が速度の関数である場合、その式を求めなさい。

**問4** 落下距離は、時間の関数であるといえるか。落下距離が時間の関数である場合、その式を求めなさい。

**問5** 表2で時間と落下距離の列を入れ替えたとき、時間は落下距離の関数であるといえるか。時間が落下距離の関数である場合、その式を求めなさい。

$y$  が  $x$  の関数であるとき、 $x$  を独立変数、 $y$  を従属変数と呼びます。



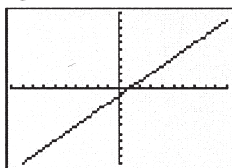
**問6**  $y$  が  $x$  の関数であるとき、独立変数  $x$  と従属変数  $y$  を入れ替えても、 $x$  は  $y$  の関数であるといえるか。

関数  $y=f(x)$  において、異なる  $x$  の値に対して異なる  $y$  の値が対応するとき、すなわち  $a \neq b$  ならば  $f(a) \neq f(b)$  であるとき、この対応は**1対1**であるという。

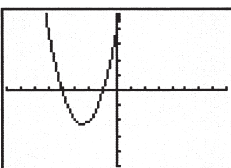
**問7** 次の図は、それぞれ  $y=f(x)$  の式で表される関数のグラフを示している。

㊦～㊫の関数のうち、1対1の対応であるものをすべてあげなさい。

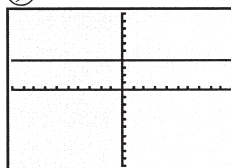
㊦



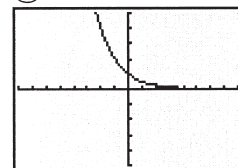
㊧



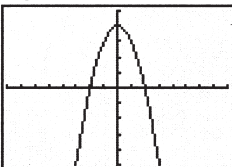
㊨



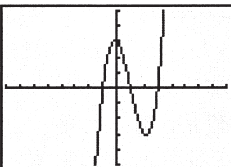
㊩



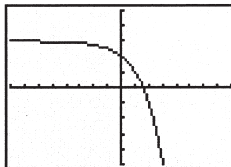
㊪



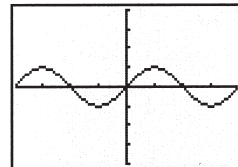
㊫



㊬



㊭



## 逆関数

関数  $y=f(x)$  において、 $x$  と  $y$  が 1 対 1 に対応するとき、 $y$  から  $x$  への対応を関数  $y=f(x)$  の**逆関数**といい、 $x=f^{-1}(y)$  で表す。

- 練習 1** 定義域が  $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  の関数  $y=f(x)$  の  $x$  と  $y$  の関係が下の表のようであるとき、次の問に答えなさい。

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=f(x)$	-11	-8	-5	-2	1	4	7	10	13

- ① 関数  $y=f(x)$  は逆関数をもつことを示しなさい。

- ② 次の値を求めなさい。

$$f^{-1}(1) \quad f^{-1}(-11) \quad f^{-1}(10) \quad f^{-1}(-5)$$

- ③ 表の空らんに入値を入れて、定義域が  $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$  で逆関数をもたない関数の例を示しなさい。

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=f(x)$									

- 練習 2** 関数  $f(x)=2x+1$  において、 $(x, f(x))$  に対応する点  $(f(x), x)$  をプロットし、 $y=f(x)$  のグラフとその逆関数  $y=f^{-1}(x)$  のグラフが直線  $y=x$  に関して対称であることを確認せよ。また、 $y=f^{-1}(x)$  の式を求めよ。

- 練習 3** 次の関数の逆関数を求めなさい。

①  $f(x)=\frac{1}{2}x-3$       ②  $f(x)=x+7$       ③  $f(x)=-3x+1$

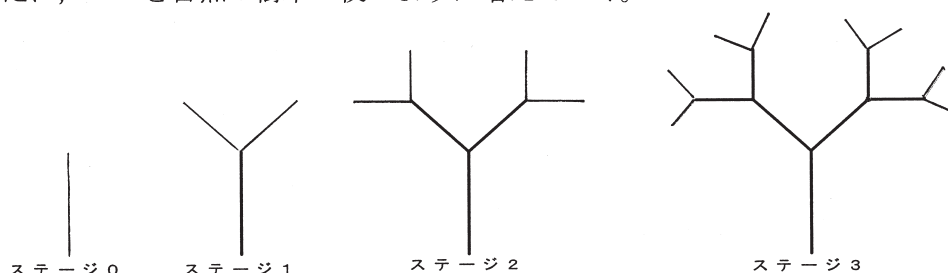
- 練習 4** 摂氏(°C)は、スウェーデン人のアンデルス・セルシウスが 1742 年に考案したもので、水の氷点を 0 度とし、沸点を 100 度と設定して、その間を 100 等分した温度の単位である。華氏(°F)は、ドイツの物理学者ガブリエル・ファーレンハイトが 1724 年に提唱した温度の単位で、氷点は 32 度、沸点は 212 度で、その間を 180 等分したものが用いられている。下の表は摂氏(°C)と華氏(°F)の対応を表したものである。

摂氏 °C	-10	-5	0	5	10	15	20	25	30	35	40
華氏 °F	14	23	32	41	50	59	68	77	86	95	104

- ① 摂氏(°C)を華氏(°F)に変換する関数の式を求めなさい。  
 ② ②の逆関数の式を求めなさい。  
 ③ 100° F は、摂氏何度か。

## 2 対数関数

自然界には、リアス式海岸、雲の形のように、不規則で複雑な形をしていても、実は単純な形の繰り返しからできているものがある。このような形は、どんなに微小な部分をとってもそれが全体と相似になる図形で、**フラクタル図形**と呼ばれる。次の図は、フラクタル図形の中の**フラクタルツリー**と呼ばれるもので、1本の線が二またに分かれ、さらにその先が二またに分かれ、さらにその先が二またに、……と自然の樹木の枝のように増えていく。



**??** フラクタルツリーの枝の数はどのように増えていくのだろうか。

**問 1** ステージ  $x$  と枝の数  $y$  との関係を示すと、下の表のようになる。

ステージ $x$	0	1	2	3	...
枝の数 $y$	1	2	4	8	...

- ①  $x$  と  $y$  の関係を式で表しなさい。また、 $y$  は  $x$  の関数であるといえるか。
- ② 関数  $y = f(x)$  は逆関数をもつか。
- ③ フラクタルツリーで  $f(16)$ ,  $f^{-1}(16)$  の値を求めなさい。
- ④  $f(9) = 512$  を  $f^{-1}(x)$  の形で表しなさい。
- ⑤ 次の値を求めなさい。

$$f^{-1}(128)$$

$$f^{-1}(32768)$$

$2^9 = 512$  なので

$f(9) = 512$  とも表せるし、

$f^{-1}(512) = 9$  とも表せるね。



**$a$  を底とする  $x$  の対数**

$a^y = x$  のとき、 $y = \log_a x$  と表し、 $a$  を底とする  $x$  の**対数**という。

$2^9 = 512$  に対して  $9 = \log_2 512$  と表される。

**練習1** 次の等式を $p = \log_a M$ の形で表しなさい。

①  $10^3 = 1000$

②  $3^5 = 243$

③  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

**練習2** 次の値を求めなさい。

①  $\log_9 729$

②  $\log \sqrt{3} 81$

③  $\log_4 2$

④  $\log_4 1$

⑤  $\log_4 4$

$a$  を 1 と異なる正の定数とするとき

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

が成り立つ。また、正の数  $M$ ,  $N$  と実数  $k$  に対して、次の公式が成り立つ。

**対数の性質**

①  $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

②  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

③  $\log_a M^k = k \log_a M$

糖尿病にかかると、インシュリンというホルモンの分泌が減ったり効きが悪くなったりするため、糖（血糖）を体の中でうまく利用できなくなる。そこで、不足しているインシュリンを注射によって投与するインシュリン治療を行う。投与された血中のインシュリン量は時間がたつと減少し、薬や個人個人によって変わるが、典型的なモデル式は、 $x$  分後の血液中のインシュリンの単位を  $y$  とすると

$$y = 10 \times 0.95^x \quad \dots\dots (1)$$

と表される。

**??** 投与したインシュリンの量が半分になるまでにどのくらいの時間がかかるのだろうか。

**問2** 横軸を時間、縦軸を血液中のインシュリンの単位として、(1)の式のグラフをかきなさい。また、グラフからインシュリンの量が半分になるまでのおよその時間を求めなさい。

**問3** インシュリンの量が半分になるまでの時間を、対数を用いて求めなさい。



大気汚染物質の窒素化合物や硫黄酸化物が溶け込んで降る酸性雨は、水素イオン濃度を示す pH の値が 5.6 以下の雨で、土壌・森林・湖沼などに大きな被害を与える。1985 年に日本で観測された酸性雨の pH 値は 4.4~5.5, 欧州(英・独・仏)の pH 値は 4.3~5.1 であった。

**??** 酸性雨の pH 値 4.4 は、真水の何倍くらいの濃度なのだろうか。

pH 値は、右の図のように水溶液に含まれる水素イオン  $[H^+]$  の濃度(mol/l)に対応している。

pH 値と  $[H^+]$  の関係は

$$\text{pH}=0 \text{ のとき, } [H^+] = 10^0$$

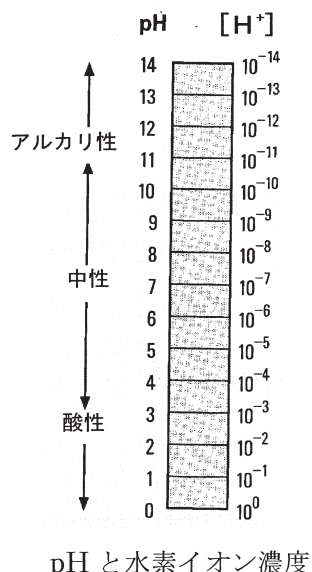
$$\text{pH}=1 \text{ のとき, } [H^+] = 10^{-1}$$

$$\text{pH}=2 \text{ のとき, } [H^+] = 10^{-2}$$

.....

$$\text{pH}=14 \text{ のとき, } [H^+] = 10^{-14}$$

胃酸の pH 値は 1.5~2.0  
水道水の pH 値は 6.5~7.0  
血液の pH 値は 7.42 だよ。



$[H^+]$  の濃度の指数のマイナスを除いた数が pH に等しいから

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

となる。この式を対数を使って表すと次のようになる。

$$\text{pH} = -\log_{10} [H^+]$$

**問 4** 蒸留水の pH 値は 7 である。1985 年に日本で観測された酸性雨に含まれる水素イオン  $[H^+]$  の濃度は、蒸留水の水素イオンの何倍から何倍の濃度か。また、欧州(英・独・仏)で観測された酸性雨に含まれる水素イオン  $[H^+]$  の濃度は、蒸留水の水素イオンの何倍から何倍の濃度か。

**問 5** 日本の中では、まれに pH3 未満のきわめて酸性度の高い酸性雨も観測されている。pH3 の酸性雨に含まれる水素イオン  $[H^+]$  の濃度は、pH5.6 の雨に含まれる  $[H^+]$  の濃度の何倍か。

### ウエーバー・フェヒナーの法則

私たちは、光、音、熱など身の回りのさまざまな刺激を受けて生活している。このとき、刺激の変化量 $\Delta I$ に対する感覚の変化量 $\Delta R$ との間には

$$\Delta R = k \frac{\Delta I}{I} \quad (k: \text{定数})$$

の関係が成り立つことが知られている（ウエーバー・フェヒナーの法則）。これは、もともとの刺激 $I$ が弱いときには、 $\Delta I$ の変化がわずかでも $\Delta R$ は大きな変化となるが、 $I$ が大きいつきには $\Delta I$ が相当大きくても、 $\Delta R$ 自体の変化はわずかであることを示している。したがって、刺激の変化量 $\Delta I$ が同じである場合には、もともとの刺激 $I$ が弱いほど、感覚の変化 $\Delta R$ が大きい。

フェヒナーは次のような実験を行い、この法則が成り立つことを確かめた。

下の図の A, B 2 本の線分を見比べ、次に C, D 2 本の線分を見比べてみよう。

A —

B —————

C —————

D —————

?? A, B と C, D の線分の長さの差は、どちらが大きくなりますか。

実は、A, B と C, D の線分の長さの差はどちらも 1.5cm であるが

$$A = 0.5\text{cm}, B = 2\text{cm}, C = 10.5\text{cm}, D = 12\text{cm}$$

であるため、A と B の長さの差の方が大きく感じられる。人間は、現に受けている刺激が弱いほど、その刺激の変化を敏感にキャッチすることができる。この変化量 $\Delta I$ 、 $\Delta R$ の関係から $I$ と $R$ の関係を求めると

$$R = K \log_{10} \frac{I}{I_0} \quad (K, I_0: \text{定数})$$

となり、反応 $R$ は刺激 $I$ の対数に比例している。

音の刺激に対しても同じように、人間の感覚は刺激の対数に比例し、量の大小をその桁数により把握するため、極めて微弱な音から強大な大きさの音まで、広い範囲の音を捉えることができる。

音の強さは、音の出す振動体（音源）のエネルギーがどれだけの強さで伝わるかによって表される。音源出力の単位としてワット(W)を用いると、人間の耳に聞こえる最低レベルの音は、1秒間で1m<sup>2</sup>あたり10<sup>-12</sup>Wという微量のエネルギーで、最大レベルの音は1秒間で1m<sup>2</sup>あたり1Wである。すなわち、可聴音の強さは、10<sup>-12</sup>~1(W)という我々の感覚ではつかみにくい範囲の数値であるため、感覚に見合った数値0~120に変換している。この変換した数値を音圧レベルと呼び、デシベル(dB)という単位で表す。

音の対象	音の強さ (W/m <sup>2</sup> )	音圧レベル (dB)
落雷、生ドラム、ロックバンド	10	130
200m 上空のジェット機の騒音	1	120
600m 上空のジェット機の騒音	10 <sup>-1</sup>	110
犬の声 (1m), 地下繁華街	10 <sup>-2</sup>	100
電車の通るガード下の音	10 <sup>-3</sup>	90
機械工場の音, ステレオ中音量	10 <sup>-4</sup>	80
掃除機, タ立, テレビ中音	10 <sup>-5</sup>	70
普通の声の会話, 銀行内の音	10 <sup>-6</sup>	60
静かな教室, 図書館	10 <sup>-7</sup>	50
こおろぎの遠音	10 <sup>-8</sup>	40
かすかな声, 洋服を着る音	10 <sup>-9</sup>	30
そよ風の音, 呼吸する音	10 <sup>-10</sup>	20
蝶の羽ばたき, 無響室	10 <sup>-11</sup>	10
基準の音	10 <sup>-12</sup>	0

表1 音の強さと音圧レベル

**??** 25名の生徒が1つの教室内で一斉に話し出すと、音の大きさは何dBくらいになるのだろうか。

音の強さ  $I$  (W/m<sup>2</sup>) と音圧レベル  $L$  (dB) との間には

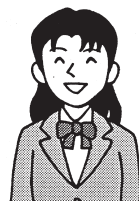
$$L \text{ (dB)} = 10 \times \log_{10} \frac{I \text{ (W/m}^2\text{)}}{10^{-12} \text{ (W/m}^2\text{)}}$$

の関係がある。

- 問6** 表1より、普通の声の会話は60dBで、このとき音の強さは $10^{-6}W$ となる。では、25名が同時に話すと、音の強さ $I$ は何 $W$ になるか。また、音圧レベル $L$ は何dBになるか。

音圧レベルは音の強さ  $I=25 \cdot 10^{-6}$  を、

$$L(\text{dB}) = 10 \times \log_{10} \frac{I(\text{W/m}^2)}{10^{-12}(\text{W/m}^2)} \text{ に代入すると求められるね。}$$



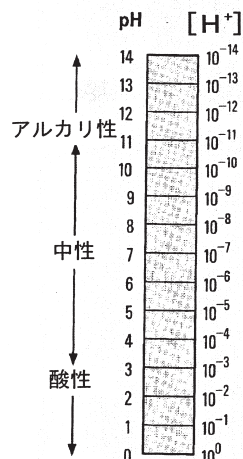
- ☞☞ 音圧レベルを、30dB から140dB まで測ることができる騒音計を使って、25名が同時に話したときの音の大きさを測定し、計算した結果と同じになるか確かめてみましょう。

- 問7** エアコンが作動している大講義室の音の大きさは、誰も人がいない場合 40dB で、100名の生徒がテストを受けているときは、ペンの音や紙をめくる音のために60dB に上がっていた。100名の生徒が均一の音を発生していると仮定した場合、生徒数が25名であれば何dBの音になると考えられるか。

- 問8** 環境基本法によると、幹線道路に面する地域の昼間の騒音基準値は70dB以下であることが望ましいと定められている。

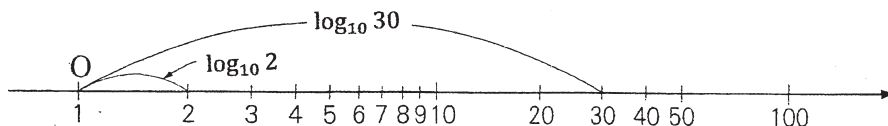
- ① 76dBの騒音は、70dBの騒音の何倍の強さの音か。
- ② 70dBの騒音の車が2台走っていると、全体の騒音は何dBになるか。

pHと水素イオン濃度の関係を表す右の図は、水溶液の酸性、アルカリ性の度合を示す指標であるpHと、水溶液中に含まれる水素イオン濃度 $[H^+]$ との関係を示したもので、左側に0から14までの数、右側に $10^0$ から $10^{-14}$ までの数が等間隔に並んでいる。左側の目盛りはとなり合う数の差が一定、右側の目盛りはとなり合う数の比が一定である。右側の水素イオン濃度 $[H^+]$ を示す目盛りのように、となり合う数の比が一定な目盛りについて考えてみよう。



pHと水素イオン濃度

私たちが普段使うものさしの目盛りは、となり合う数の差が一定で、等間隔に数がふられている。一方、**対数目盛り**と呼ばれるものさしは、普通のものさしの  $\log_{10} x$  の長さに対応する点に  $x$  を目盛っている。



**??** 対数目盛りにはどのような特徴があるか調べてみよう。

**問 9** 普通のものさしの 10cm を 1 とみて、次の間に答えなさい。

- ① 対数目盛りの 1, 2, 3, …… , 9, 10, 20, 30, …, 90, 100 を目盛りなさい。
- ② この対数目盛りの 1 から 100 までの実際の長さは何 cm か。
- ③ 対数目盛りの 1 から 10 までと、10 から 100 までとの間にはどんな関係がありますか。

**問 10**  $x$  軸が普通の等間隔目盛り、 $y$  軸が対数目盛りの方眼紙を片対数方眼紙と呼ぶ。片対数方眼紙に次のグラフをかきなさい。

- |           |                   |           |
|-----------|-------------------|-----------|
| ① $y=2x$  | ② $y=x^2$         | ③ $y=x^4$ |
| ④ $y=2^x$ | ⑤ $y=3 \cdot 2^x$ |           |

**問 11** 地球誕生から現在までの約 46 億年を 1 年にたとえると、1 月 1 日に地球が誕生し、2 月頃原子地殻の形成がはじまった。3 月頃、原始の海洋や大気ができ、その海に生命が誕生した。このことについて、次の間に答えなさい。

- ① 地球が誕生してから現在までのア～ケを、対数目盛りに記入しなさい。
  - ② 人類が現れるのは何月ごろか、予想しなさい。
- ア 46 億年前：地球が誕生                      イ 40 億年前：地球に海ができ、生命が誕生  
 ウ 38 億年前：地球に青い空と海、堅い地殻ができる  
 エ 35 億年前：原核生物が誕生  
 オ 27～28 億年前：藍藻類が出現し光合成の開始、動物の出現  
 カ 10 億年前：両生生殖がはじまる      キ 6～7 億年前：氷河期  
 ク 5.5 億年前：貝類、陸上動物、巨大恐竜の出現  
 ケ 500～400 万年前：アフリカで人類が誕生

### 3 データの線形化

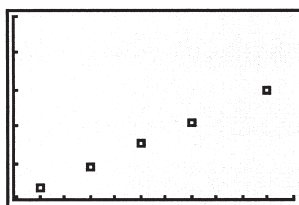
**??** 指数関数  $y=2^x$  と対数関数  $y=\log_{10} 2^x$  のグラフにはどのような関係があるのだろうか。

**問1**  $y=2^x$  のグラフをかきなさい。

**問2**  $x$  のそれぞれに対応する  $y$  の値を求め、右の表の空らんをうめなさい。

$x$	$y=2^x$	$y=\log_{10} 2^x$
0		
1		
3		
5		
7		
10		

**問3** 問2の表の点  $(x, \log_{10} 2^x)$  を座標平面上にプロットすると、ある直線上にのっている。この直線の方程式を求めなさい。



```

WINDOW
Xmin=0
Xmax=11
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1

```

**問4** 問3で求めた直線の傾きと  $y=2^x$  との間にはどのような関係があるか。

▶▶  $y=a \times b^x$  の形の指数関数の場合にも、グラフ上のすべての点を一直線上にのるように変換することができるのだろうか。

**問5**  $y=3 \times 2^x$  のグラフをかけ。

**問6**  $y=3 \times 2^x$  の点  $(x, y)$  を点  $(x, \log y)$  へと変換したとき、 $y=3 \times 2^x$  のグラフ上のすべての点が一直線上にのるかどうかが確かめよ。また、一直線上にのったとき、その直線の方程式を求めなさい。

下の表は日本付近（北緯25～48°，東経125～150°の範囲）で，1961年から1999年の間に気象庁が決めたマグニチュード M5 以上の地震の発生数Nを示したものである。

M	N	M	N	M	N	M	N
5.0	632	6.0	109	7.0	15	8.0	0
5.1	581	6.1	80	7.1	12	8.1	2
5.2	469	6.2	63	7.2	7		
5.3	379	6.3	48	7.3	2		
5.4	306	6.4	40	7.4	3		
5.5	285	6.5	34	7.5	4		
5.6	217	6.6	33	7.6	3		
5.7	216	6.7	23	7.7	3		
5.8	160	6.8	15	7.8	4		
5.9	126	6.9	14	7.9	2		

平成 17 年版「理科年表」

**??** 最大級の地震のマグニチュードは，どのくらいの値だろうか。

**問 7** 上の表のデータから，横軸を M，縦軸を地震の発生数 N の常用対数(10 を底とする対数)をとってグラフをかきなさい。

**問 8** 問 7 でかいたグラフから， マグニチュード M と地震の発生数 N には

$$\log_{10} N = a - b \times M$$

の関係があることが推測される。a と b の値を求めなさい。

**問 9** M が 1 大きくなると地震の起こる回数 N は何分の 1 になりますか。

**問 10** 問 8 で求めた式から， 起こりうる最大級の地震のマグニチュードを推定しなさい。

**??** 大きい動物ほど、体重の割にはエネルギーを使わないといわれている。本当なのだろうか。

▶▶ 次の表は、ほ乳類の体重と酸素消費量の関係を示している。この表のデータから、大きい動物ほど体重の割にはエネルギーを使わないのかどうか調べてみよう。

	体重 g	酸素消費量 mL/g 体重/h
チンパンジー	38000	0.249
ハリネズミ	684	0.73
マウス	35.7	1.59
シマリス	107	1.25
ウサギ	1520	0.47
犬	13900	0.327
猫	3000	0.44
牛	500000	0.125
羊	51500	0.256
馬	703000	0.145
らくだ	407000	0.099
インド象	3833000	0.07

平成 17 年版「理科年表」

**問 11** 上の表のデータについて、次の問に答えなさい。

- ① 横軸を体重、縦軸を酸素消費量の常用対数をとってグラフをかき、対数変換  $(x, y) \rightarrow (x, \log y)$  がデータを直線化できたかどうか調べなさい。
- ② 横軸を体重の常用対数、縦軸を酸素消費量の常用対数をとってグラフをかき、両対数変換  $(x, y) \rightarrow (\log x, \log y)$  がデータを直線化できたかどうか調べなさい。
- ③  $(\log x, \log y)$  の回帰直線の式を求めなさい。

**問 12** 酸素消費量とエネルギーにはどのような関係があるか。これより、大きい動物ほど体重の割にはエネルギーは使わないといえるか。あなたの考えを述べなさい。



## 第4節 関数の値の変化

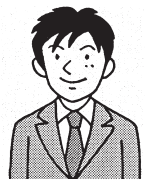
### 1 時間・距離・速さ

肉食動物のチーターは、草食動物のシマウマをつかまえるために、時速110km以上のスピードで走る。あの巨体の象でさえも、およそ時速40kmで走る。

**??** あなたが全速力で走ったとき、いったいどのくらいの速さになっているのだろうか。それを求めるにはどうすればよいだろうか。

▶▶ 100m 走をしたときの最高速を考えてみよう。

100m 走のタイムを計るだけでよいのかな？



**問1** 100m を 12.5 秒で走った A さんは、次のような計算をして、「私の最高速は、時速 28.8km だ」と言っている。この考え方は正しいか。

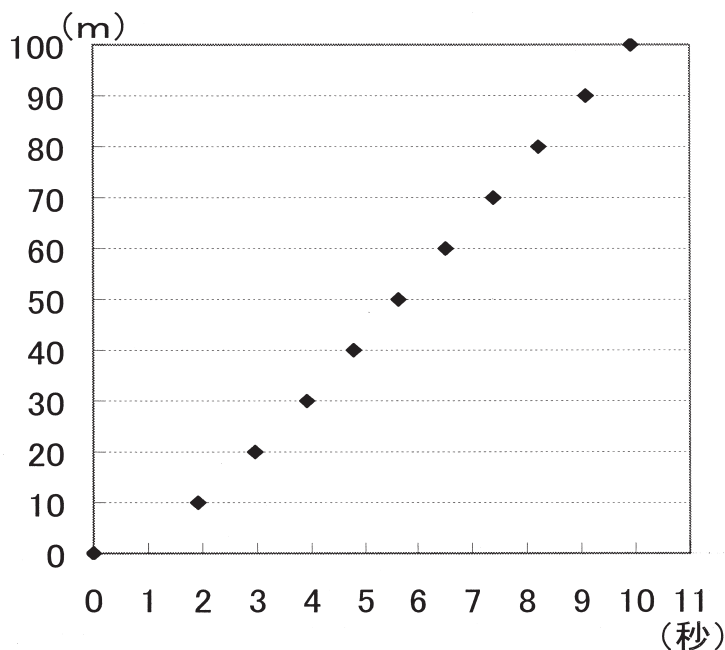
$$100 \div 12.5 = 8 \quad (\text{m/秒})$$

これを時速になおすと 28.8km/時

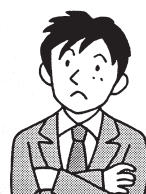
**問2** 下の表は、カールルイスの、1987 年世界陸上大会における 100m 決勝の記録である。このレースで、カールルイスの最高速はおよそどのくらいか。また、スタートしてからどの地点で最高速に達しているか。

時間	0.00	1.94	2.96	3.91	4.78	5.64	6.50	7.36	8.22	9.07	9.93
距離	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

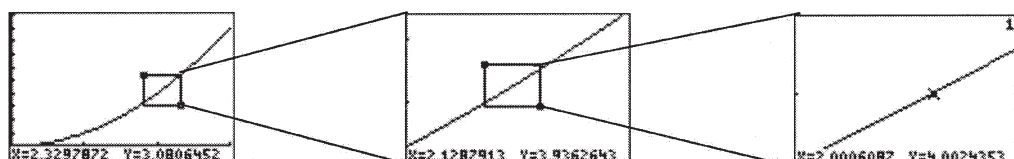
- Q** 問2のレースで、カールルイスは、1秒後には、およそどのくらいの速さになっていたかをグラフを利用して推測しよう。



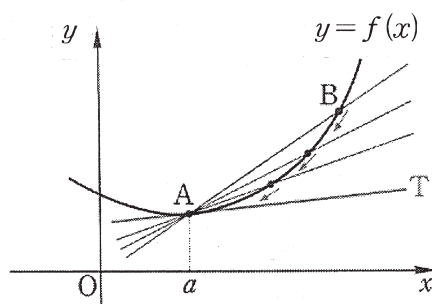
象と比べると、どちらが速いかな。



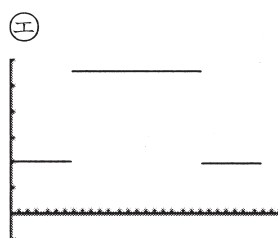
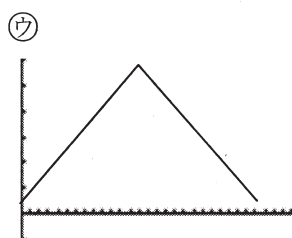
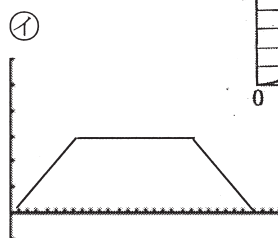
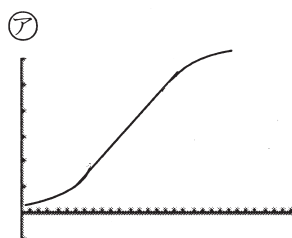
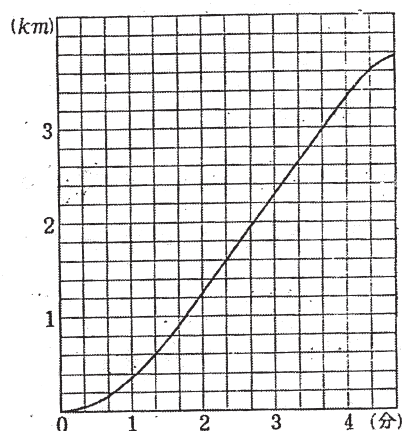
- 問3** 上のグラフを使用して、0.5秒後、1.5秒後、2秒後、8秒後、9秒後のおよその速さを推測しなさい。
- 問4** カールルイスが100mを走っている間の、時間と速さの変化の関係を表すグラフの概形を推測しなさい。また、上のグラフと比べて、気づいたことをあげなさい。
- 問5** 下の図は、Aさんが走り始めたときの時間と距離の関係を表したグラフを、zoom in機能を用いて表示したものである（横軸が時間、縦軸が距離）。このようにzoomをくり返すと、グラフはどのように見えてくるか。また、そのことと速さの関係を説明しなさい。



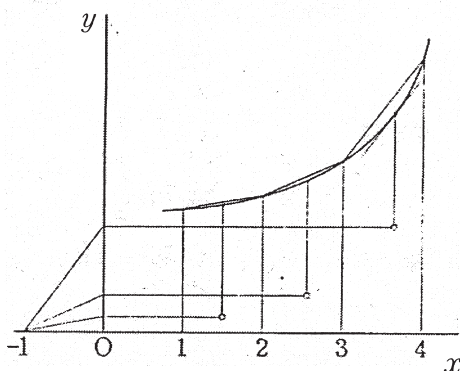
右の図で、点 B がグラフ上を動いて限りなく点 A に近づくとき、直線 AB は、直線 AT に限りなく近づく。この直線 AT を点 A における曲線  $y=f(x)$  の接線といい、点 A を接点という。



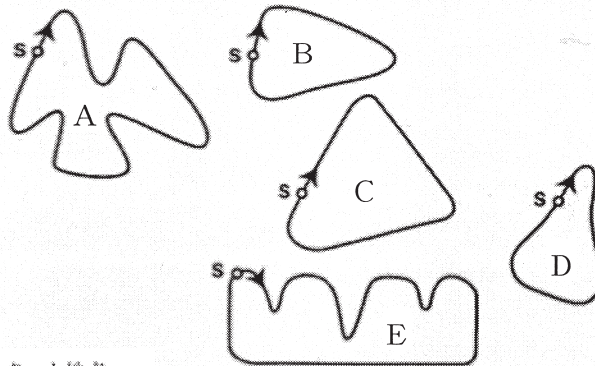
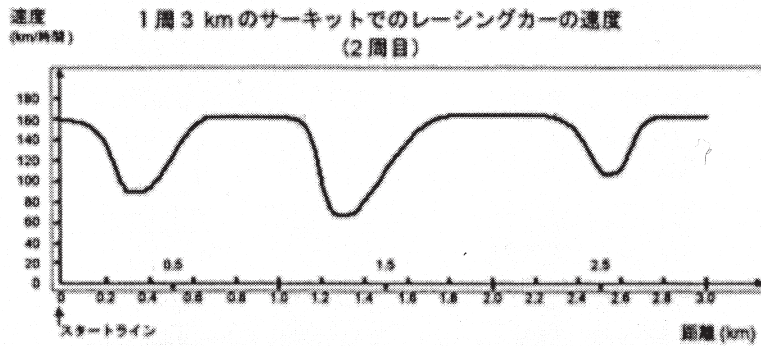
**問6** 右のグラフは、駅を発車した電車の、時間と距離の関係を表している。このとき時間と速さの関係を表すグラフの概形として、もっとも適しているものを、㉠～㉥から選びなさい。ただし、すべて、横軸は時間を、縦軸は速さを表している。



**問7** 右の図は、時間  $x$  と距離  $y$  のグラフから、時間と速さのグラフをつくる1つの方法を示している。どのような方法かを説明しなさい。



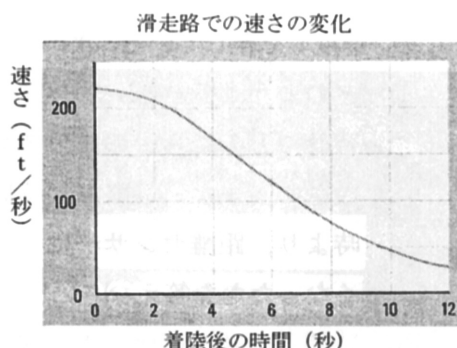
- 問 8** 下のグラフは、1周 3km の平らなサーキットで、レーシングカーの2周目の速さがどのように変化したかを示している。このレーシングカーが走行したサーキットはどのサーキットか。下の図の A～E のなかから1つ選びなさい。



S : スタート地点

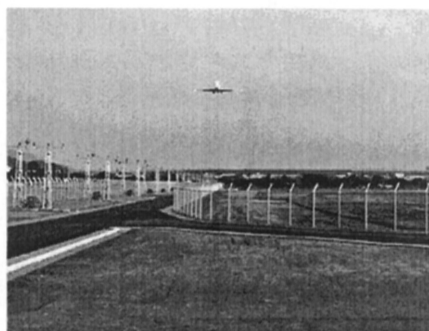
(『生きるための知識と技能 OECD 生徒の学習到達後調査 2000 年調査国際結果報告書』ぎょうせいより引用)

飛行機が滑走路に着陸するとき、220ft/秒（およそ 240km/時）から 30ft/秒（およそ 33km/時）まで、かなり急速に速さを落とさなければならない。乗客に過度の不快感を与えることなく止まるには、速さを右のグラフのようにコントロールする必要がある。



?? 滑走路の長さはどのくらい必要なのだろうか。

**Q** 最初の 6 秒間は、平均すると 3 秒後の速さで動いていたとして、最初の 6 秒間で進んだ距離を求めてみよう。また、次の 6 秒間は、平均すると 9 秒後の速さで動いていたとして、その間に進んだ距離を求めてみよう。ただし、1ft は、約 30.48cm である。



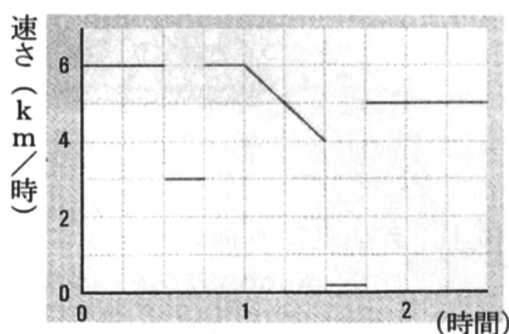
☞ 時間と速さのグラフから、進んだ距離を求める方法について話し合ってみよう。

**問 9** 右のグラフは、2.5 時間に及ぶクロスカントリースキーでの、あるスキーヤーの進む速さの変化を表している。次の問に答えなさい。

① このグラフに合う、クロスカントリースキーのコースの概要を説明しなさい。

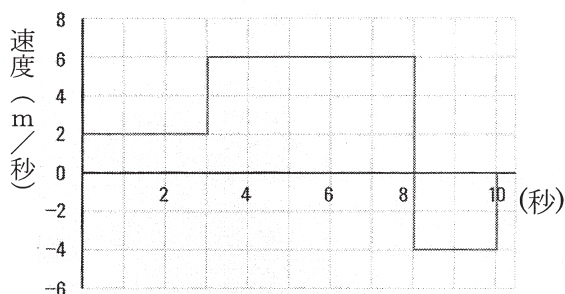
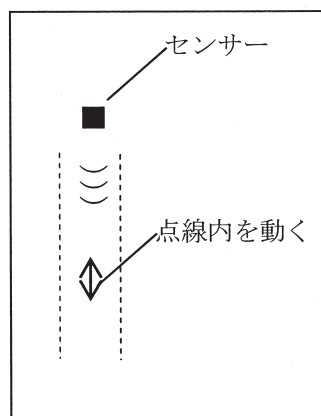
② このスキーヤーは最初の 1 時間で何 km 進みましたか。また、次の 1 時間では何 km 進みましたか。

③ このスキーヤーは、クロスカントリースキーで全部で何 km 進みましたか。

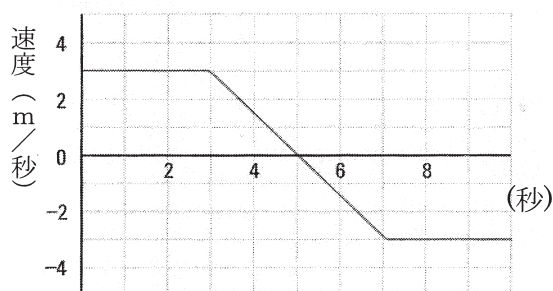


**問 10** 下のグラフは、速度を測るセンサーの前を人が歩いたときの、速度の変化を表している。

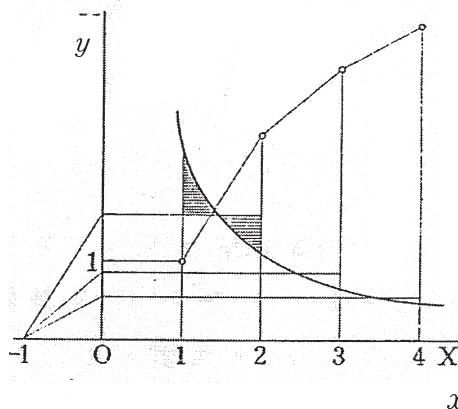
- ① どのように歩いたかを説明しなさい。
- ② 合計でどのくらいの距離を歩いたかを答えなさい。また、最終的な位置は、スタート時より、センサーに近くなったか、遠くなったかを答えなさい。
- ③ 時間と距離の関係を表すグラフの概形をそれぞれかきなさい。
- ④ ③のグラフは 1 通りに決まらない。その理由を説明しなさい。



負の値の速度は、どう解釈すればよいのかな。



**問 11** 右の図は、時間と速さのグラフから、時間と距離のグラフをつくる 1 つの方法を示している。どのような方法かを説明しなさい。



## 2 導関数と原始関数

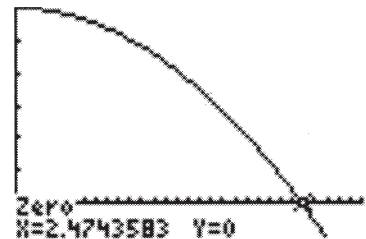
高層ビルの窓を、外側から拭いている光景を見たことはないだろうか。このような作業をする清掃員は、命綱をつけている。さらに、清掃用具も、すべて、体にロープで結びつけている。ライターや携帯電話をポケットに入れていないことも、事前に確認する。万一、落としたときに非常に危険だからである。

**??** 30mの高さから物を落としてしまったとき、地上付近ではどのくらいの速さになっているのだろうか。

空気抵抗を考えないと、30mの高さから落とした物の  $t$  秒後の高さは

$$f(t) = 30 - 4.9t^2$$

で表される。



地面につくのは、お  
よそ 2.4 秒後だね。

▶▶ 2.4 秒後の速さを求めてみよう。

時速になおすとどの  
くらいかしら。



2.4 秒後の速さは

2.4 秒後から 2.5 秒後までの 0.1 秒間の平均の速さ

2.4 秒後から 2.41 秒後までの 0.01 秒間の平均の速さ

2.4 秒後から 2.401 秒後までの 0.001 秒間の平均の速さ

のように、経過時間を限りなく 0 に近づけていくことで求められる。この速さを、**瞬間の速さ**という。

**Q** 0 秒後から 2.4 秒後までの 0.1 秒ごとの瞬間の速さを求めよう。

時間	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2
速さ												

時間	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4
速さ												

グループで分担してやりましょう！



**問 1** 上で求めた 0.1 秒ごとの瞬間の速さをグラフに表しなさい。

▶▶上の例で、瞬間の速さの変化が 1 次関数になる理由を考えよう。

$a$  秒後の高さ  $(a+h)$  秒後の高さをそれぞれ求めると

$$a \text{ 秒後の高さは } f(a) = 30 - 4.9 \times a^2$$

$$(a+h) \text{ 秒後の高さは } f(a+h) = 30 - 4.9 \times (a+h)^2$$

したがって、 $a$  秒後から  $(a+h)$  秒後までの平均の速さは

$$\begin{aligned} \frac{\{30 - 4.9 \times (a+h)^2\} - \{30 - 4.9 \times a^2\}}{h} &= -\frac{4.9\{(a+h)^2 - a^2\}}{h} \\ &= -\frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\ &= -4.9(2a + h) \end{aligned}$$

瞬間の速さは、 $h$  を限りなく 0 に近づけたものなので、 $-9.8a$  m/秒 となる。

関数  $f(x)$  において、 $x$  が  $a$  と異なる値をとりながら限りなく  $a$  に近づくととき、 $f(x)$  が一定の値  $\alpha$  に限りなく近づくなれば

$$x \rightarrow a \text{ のとき } f(x) \rightarrow \alpha$$

または

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

と書き、 $\alpha$  を  $x$  が  $a$  に限りなく近づくとときの  $f(x)$  の**極限值**という。



関数  $y=f(x)$  の  $x=a$  における瞬間の速さを**微分係数**といい、 $f'(a)$  で表す。すなわち

$$f'(a)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

関数  $f(x)$  において、 $x$  のおおのの値  $a$  に微分係数  $f'(a)$  を対応させて得られる関数を  $f(x)$  の**導関数**という。すなわち

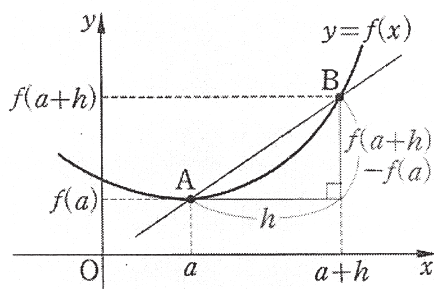
$$f'(x)=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

また、 $x$  の関数  $f(x)$  から、その導関数を求めることを、 $f(x)$  を  $x$  について**微分する**という。

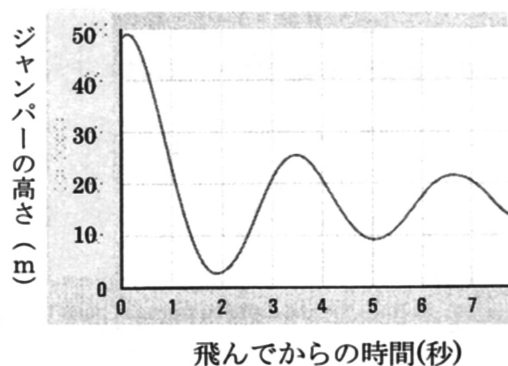
逆に、導関数に対して、もとの関数のことを**原始関数**という。

**問 2** 右の図を用いて、関数  $y=f(x)$  の  $x=a$  における微分係数は、曲線  $y=f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線の傾きに等しいことを説明しなさい。

直線 AB の傾きを表す式はどうかかな？

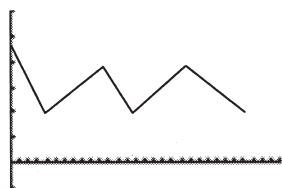


- 問3** 下のグラフは、バンジージャンプをしたときの、時間と高さの関係を表している。この関数を $f(x)$ とするとき、あとの問に答えなさい。

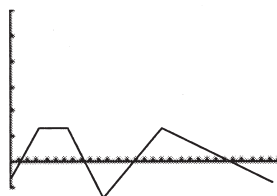


- ①  $y=f(x)$  の接線の傾きが 0 になっているのはいつか。グラフ上に示しなさい。また、そのときのジャンパーの動きを説明しなさい。
- ②  $y=f(x)$  の接線の傾きが正の値である範囲をグラフ上に示しなさい。また、そのときのジャンパーの動きを説明しなさい。
- ③ 時間と速度の関係を表すグラフの概形としてもっとも適しているものを、次の㉖～㉙の中から選びなさい。ただし、すべて、横軸は時間、縦軸は速度を表しています。

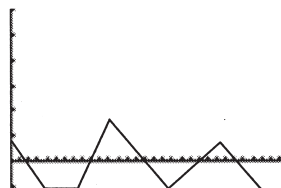
㉖



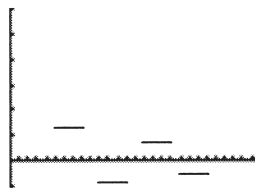
㉗



㉘



㉙



- 問4  $f(0)=3, f'(0)=-8, f'(2)=0$ である  
2次関数のグラフの概形をかきなさい。

微分係数が0の  
ということは、接線  
の傾きは…？



- 問5 関数  $y=f(x)$  において、 $f'(x)$  の値が次のようになっている。

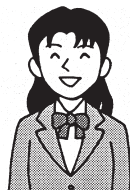
$x < 0$ のとき	$f'(x) > 0$
$x = 0$ のとき	$f'(0) = 0, f(0) = 1$
$0 < x < 2$ のとき	$f'(x) < 0$
$x = 2$ のとき	$f'(2) = 0, f(2) = -3$
$2 < x$ のとき	$f'(x) > 0$

このとき、関数  $y=f(x)$  のグラフの概形をかきなさい。

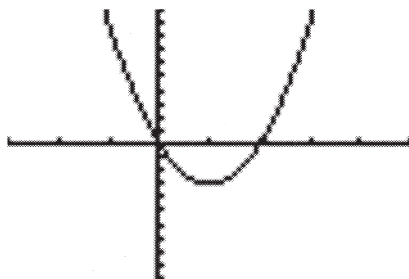
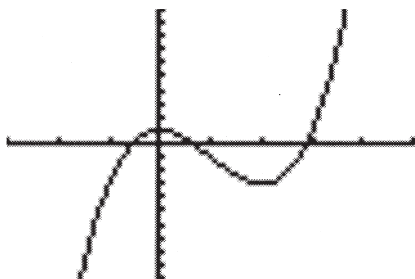
問5 の  $f'(x)$  の値の変化を、次のような表にかくことがある。このような表を**増減表**という。

$x$	.....	0	.....	2	.....
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	-3	↗

増減表の中の、↗ や ↘ は  
何を表しているのかしら。



問5 の関数  $y=f(x)$  は、例えば、下左図のようになる。下右図は、このときの  $y=f'(x)$  のグラフである。



**??** 関数  $f(x) = x^3 - 12x - 1$  のグラフの概形を、グラフ電卓などを用いずにかこう。

関数  $f(x) = x^3 - 12x - 1$  の導関数  $f'(x)$  を求めよう。

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{((x+h)^3 - 12(x+h) - 1) - (x^3 - 12x - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 12h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 12)$$

$$= 3x^2 - 12$$

$$= 3(x+2)(x-2)$$

増減表があれば、グラフの概形がかけたね。



よって、増減表は次のようになる。

$x$	.....	-2	.....	2	.....
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	15	↘	-17	↗

**問6** 上の増減表をもとに、関数  $f(x) = x^3 - 12x - 1$  のグラフの概形をかきなさい。

▶▶  $f(x) = x^3 - 12x - 1$  の導関数を簡単求める方法はないだろうか。

**Q** 次の関数  $f(x)$  の導関数を求めてみよう。

- (1)  $f(x) = x$       (2)  $f(x) = x^2$       (3)  $f(x) = x^3$       (4)  $f(x) = 1$

**Q**の結果から

**1**  $n = 1, 2, 3$  のとき       $(x^n)' = nx^{n-1}$

また

**2**  $c$  が定数のとき       $(c)' = 0$

であることがわかる。

**問7** 次の関数  $f(x)$  の導関数を求めなさい。

- ①  $f(x)=2$       ②  $f(x)=-3x$       ③  $f(x)=4x^2$       ④  $f(x)=-5x^3$

問7から定数  $k$  と関数  $f(x)$  について

$$\boxed{3} \quad \{kf(x)\}' = kf'(x)$$

であることがわかる。

以上のことから、 $f(x)=x^3-12x-1$  の導関数  $f'(x)$  は

$$f'(x)=(x^3)' - 12(x)' - (1)'$$

で、求められることがわかる。



$(x)'$  は関数  $f(x)=x$  を微分すること  
を表しているよ。

一般に、2つの関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  について、次の式が成り立つ。

$$\boxed{4} \quad y=f(x)+g(x) \quad \text{ならば} \quad y'=f'(x)+g'(x)$$

### 導関数の公式

$$\boxed{1} \quad n=1, 2, 3 \text{ のとき} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\boxed{2} \quad c \text{ が定数のとき} \quad (c)' = 0$$

$$\boxed{3} \quad k \text{ が定数のとき} \quad \{kf(x)\}' = kf'(x)$$

$$\boxed{4} \quad y=f(x)+g(x) \quad \text{ならば} \quad y'=f'(x)+g'(x)$$

**問8** 次の導関数  $f'(x)$  の原始関数を答えなさい。

- ①  $f'(x)=2x$       ②  $f'(x)=x+1$

原始関数は1  
つだけかしら。

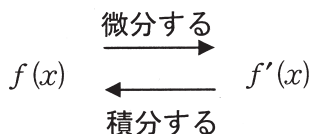


$x$  の関数  $f(x)$  から、その導関数を求めることを、 $f(x)$  を  $x$  について微分するといった。逆に、原始関数を求めることを**積分する**という。

関数  $s(x)$  の原始関数の1つが  $F(x)$  であるとき

$$\int s(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

と書く。



### 3 定積分の考え

2002 年に、フランス軍の退役将校であるミシェル・フルニエ氏(58 歳)が次のような計画を立てた。

フルニエ氏は高さ 95 メートルもあるヘリウムガス気球に乗り込み、カナダ、サスカチュワン州の何もない広大な草原の上空を、2 時間半かけて高度 4 万メートルまで上昇する。

エベレストの 4 倍以上の高さの、まさに宇宙との境目といえるその位置で、フルニエ氏は気球から飛び降り、6 分間におよぶ落下を開始する。フルニエ氏の落下時の速度は、時速 1200~1600 キロメートルに達するとも予測される。

仮に計画通りに進めば、フルニエ氏は特筆すべき 3 つの「世界新記録」を達成し、歴史書に名を刻むことになる——「最高」高度からのスカイダイビング。もし音速を超えれば、落下時に達した「最速」速度。そして過去「最長」のフリーフォールだ。高度 4 万メートルの上空からのフリーフォールを乗り切るため、フルニエ氏は、成層圏の厳しい環境に耐える 4 層からなる与圧服を着用する。超高層大気中でフルニエ氏は、低い気圧、異常な気温(摂氏マイナス 110 度)、太陽放射など、1 つ間違えば命にかかわりかねない条件に立ち向かうことになる。

フルニエ氏は次のように話す。「スカイダイビング・スーツの設計には多くの工夫が凝らされている。スーツはフランスで開発され、高高度を飛ぶ飛行士が着用するスーツを改造したものだ。これを着用すれば、1 ヘクトパスカル、つまり通常の地上の 1000 分の 1 の気圧で 1 時間耐えられる。科学がもたらした最高の装備であるはずだ——ひとたび気球から飛び立てば、私を死から隔ててくれるのはこのスーツだけなのだ」

またフルニエ氏は、音速で地上へ突進する際に、致命的ともなるスピンを起こさないように注意を払わなければならない。体がスピンしてしまうと、スカイダイバーはものの数秒で意識を失う可能性がある。ただフルニエ氏のパラシュートは、万が一意識不明の状態に陥っても、地上 300 メートルの上空で自動的に開くように設計されている。

参考：<http://hotwired.goo.ne.jp/news/news/20020730201.html>

<http://hotwired.goo.ne.jp/news/news/culture/story/20020731205.html>

**??** スカイダイビングを楽しむ人は増えてきている。ふつう高度 2500~4500mのところからダイブするという。スカイダイビングの落下距離について考えてみよう。

**Q** スカイダイビングでは、 $t$  秒後の理想的な落下速度  $s(t)$  (feet/秒) は

$$s(t) = 120(1 - 0.8^{-t})$$

で表される。

次の時間の落下距離を求めよう。(ただし、1feet は 30.48cm である。)

0 秒後から 1 秒後

0 秒後から 2 秒後

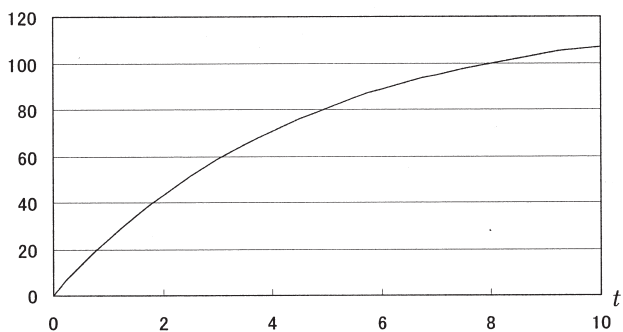
0 秒後から 3 秒後

⋮

0 秒後から 9 秒後

0 秒後から 10 秒後

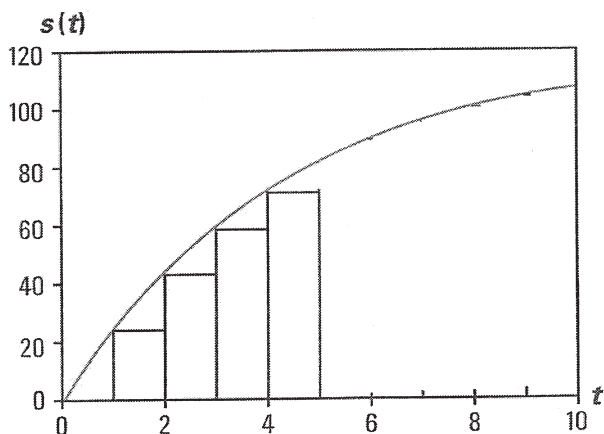
feet/秒



時間	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
距離											

例えば、0 秒後から 5 秒後の間のおよその落下距離  $d$  は、次のように表すことができる。

$$d = 1 \times s(0) + 1 \times s(1) + 1 \times s(2) + 1 \times s(3) + 1 \times s(4)$$



上の式と左の図の  
関係を考えよう。



分割の幅、すなわち長方形の横幅をより細かくすると、実際の落下距離に近づく。

$$d = 0.5 \times s(0) + 0.5 \times s(0.5) + 0.5 \times s(1) + 0.5 \times s(1.5) + 0.5 \times s(2) \\ + 0.5 \times s(2.5) + 0.5 \times s(3) + 0.5 \times s(3.5) + 0.5 \times s(4) + 0.5 \times s(4.5)$$

**問 1** 表計算ソフトを利用して，長方形の横幅をより細かくしたときの，落下距離  $d$  の変化のようすを調べなさい。

長方形の横幅	落下距離 $d$
1	
0.5	
0.1	
0.01	

t	s(t)	長方形の面積
0	0	0
0.1	2.648068	0.264806777
0.2	5.2377	0.523770003
0.3	7.770186	0.777018626
. . . . .		
9.7	106.223	10.62230171
9.8	106.527	10.6527037
9.9	106.8243	10.68243479
10	107.1151	10.71150981

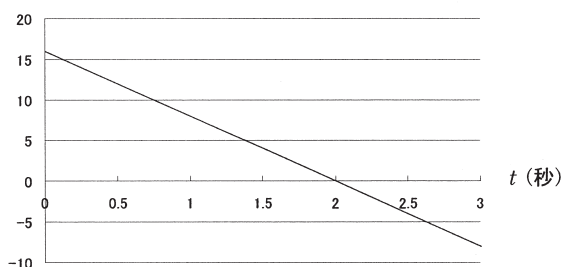
長方形の面積の和＝

分割の幅を限りなく 0 に近づけたときの，長方形の和の極限を

$$\int_0^{10} s(t) dt$$

と書き，0 から 10 まで定積分する という。

**問 2** 右のグラフは，野球で，フライを打ったときの，ボールの速度の変化を表している。正の値は上向き，負の値は下向きの動きを示している。この関数を  $y=s(t)$  とするととき，次の問に答えなさい。



- ①  $\int_0^3 s(t) dt$  は何を表すか。
- ②  $\int_1^3 s(t) dt$  の値を答えなさい。

**問 3** 次の性質をもつ 1 次関数  $f(x)$  をそれぞれ答えなさい。

- ① 1 から 5 までの定積分の値が 0 である。
- ② -5 から 5 までの定積分の値が 0 である。
- ③ 1 から 4 までの定積分の値が 1 である。



▶▶58 ページの**Q**で  $\int s(t)dt = d(t) + C$  であるとき、1 秒後から 5 秒後までに進んだ距離を、関数  $d(t)$  を用いて表すことを考えよう。

$d(t) + C$  は、速度の関数  $s(t)$  の原始関数なので、 $t$  秒後の原点からの距離を表している。よって、1 秒後の原点からの距離は  $d(1) + C$ 、5 秒後の原点からの距離は  $d(5) + C$  である。

したがって、1 秒後から 5 秒後までに進んだ距離は

$$d(5) + C - \{d(1) + C\}$$

で求められる。

このことから、次のことがわかる。

$$\begin{aligned}\int_1^5 s(t)dt &= d(5) + C - \{d(1) + C\} \\ &= d(5) - d(1)\end{aligned}$$

**問 4** 問 2 の関数  $y = s(t)$  について、次の間に答えなさい。

- ① 関数  $y = s(t)$  を求めなさい。
- ② ①の原始関数を求め、それを用いて、 $\int_0^3 s(t)dt$  の値を求めなさい。

**問 5** 次の性質が成り立つことを説明しなさい。

- ①  $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- ②  $\int_a^b \{f(x) + 5\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b 5dx$

# 第5単元

---

## データの処理

## 第1節 データ解析の基礎

---

### 1 メジアン-メジアン直線

WHO 世界保健機関は、世界の人々の喫煙行動が変わらなければ 21 世紀中には、20 世紀におけるたばこ関連疾患による死者の 10 倍にあたる 10 億人が、たばこ関連疾患で死亡するだろうと予測している。喫煙者は非喫煙者よりも短命であるにも関わらず、非喫煙者よりも健康にかかる費用が大きい。先進国では、たばこ関連疾患に対する費用が年間の健康に係る費用の 6~15%に達している。高所得国、低所得国ともに GDP の 1% を喫煙者の健康対策に費やしているのである。つまり、国や地方自治体にとっても、喫煙は重要な問題なのである。この点の対応については、日本は遅れていると言わざるを得ない。たばこ税の増額や密輸の抑制に加えて、たばこの広告や販売促進を禁止することによっても、たばこの需要は減らすことができるのである。例えば、アメリカのカリフォルニア州では、1989 年に、たばこ税の増額を含む強力なたばこ対策を始めたところ、その直後から心臓病の死亡率が下がったという。

参考：

<http://www.health-net.or.jp/kenkozukuri/healthnews/050/010/k1400/index.html>

<http://www.metamedica.com/news2000/2000121701.html>

**??** 2004 年の日本の 1 人あたりの喫煙本数は 2662 本、10 万人あたりの心筋梗塞による死者数は 127 人である。もし、この喫煙本数が半減すると、死者数はどのくらいになるか、考えてみよう。



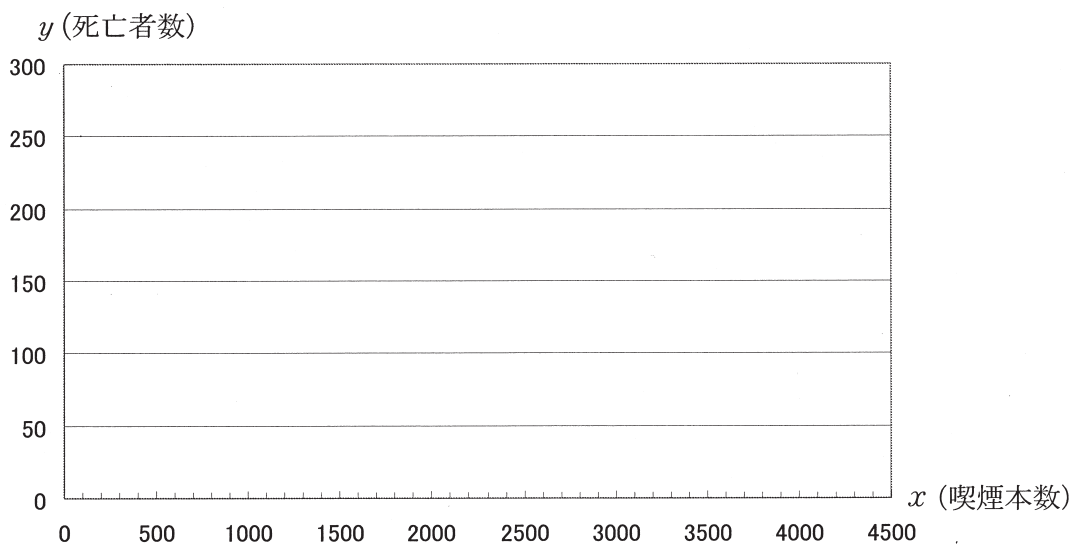
下の表は、1年間の1人あたりの喫煙本数と10万人あたりの心筋梗塞による死亡者数の、国別のデータである。この表をもとに考えてみよう。

国	1年間の1人あたりの喫煙本数	10万人あたりの心筋梗塞死亡者数
アメリカ	3900	265
カナダ	3350	212
オーストラリア	3220	238
ニュージーランド	3220	212
イギリス	2790	194
スイス	2780	160
アイルランド	2770	187
アイスランド	2290	111
フィンランド	2160	208
ドイツ	1890	150
オランダ	1810	125
ギリシャ	1800	41
オーストリア	1770	182
ベルギー	1700	118
メキシコ	1680	32
イタリア	1510	114
デンマーク	1500	120
フランス	1410	60
スウェーデン	1270	127
スペイン	1200	44

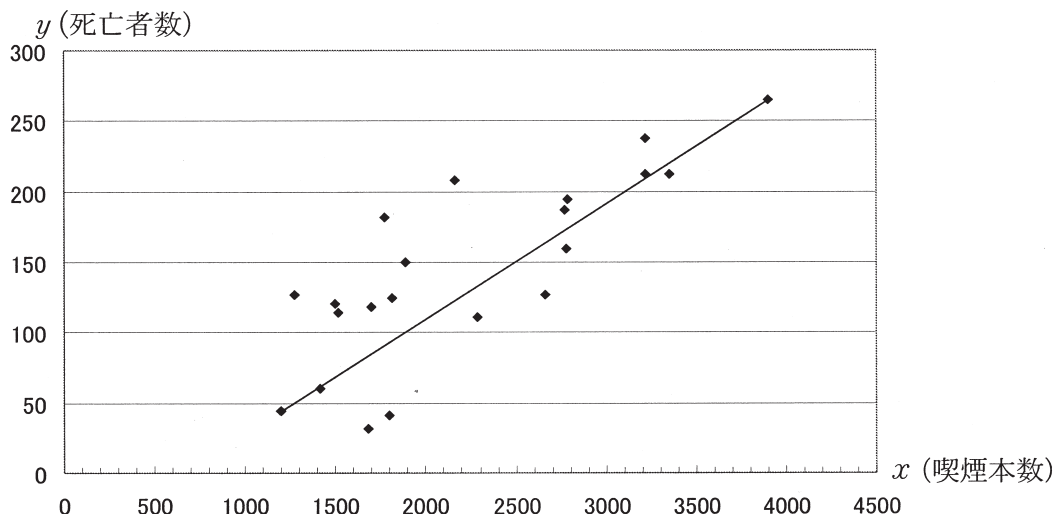
この表からどんなことがわかるかな？



**Q** 1年間の1人あたりの喫煙本数と10万人あたりの心筋梗塞による死亡者数の間には、どのような関係があるか、グラフに表して考えてみよう。



- 問1** Aさんは、喫煙本数と心筋梗塞による死亡者数の関係は、1次関数で表せるのではないかと考え、下のような直線を引いた。この直線について、あなたの考えを書きなさい。



- 問2** この場合、あなたは、どのような直線が最適だと思うか。上の図にかきこみなさい。また、なぜ、そのような直線にしたか、理由を書きなさい。

▶▶問2で考えた直線を、友だちと比べてみよう。どの直線が最も適切だろうか。

- 問3** 下の会話文を読んで、次の問に答えなさい。

Aさん「ぼくは、喫煙本数の最も少ない国と最も多い国の点を直線で結んだんだ。」

Bさん「もう少し $y$ 軸の正の方向に平行移動したらどうかしら。」

Cさん「どのくらい？」

Bさん「真ん中を通るように。」

Aさん「真ん中って、どうやって決めるの。」

Bさん「日本を含めると21カ国分のデータがあるから、11番目の国の点を通るようにすればいいんじゃないかしら。」

Cさん「11番目って、喫煙本数？ それとも死亡者数？」

Bさん「死亡者数。」

Cさん「そのときの式は？」

Bさん「 $y = \underline{\hspace{1cm}} \text{ア}$  になるよ。」

- ① 上の問1で、Aさんの考えた直線の式を求めなさい。
- ② Bさんが求めた下線部アに入る式を答えなさい。

データにあてはまる直線を求める方法として、次のようなものがある。

### ステップ1

すべてのデータ  $(x, y)$  を散布図に表し、 $x$  座標の値で以下のようにおおよそ 3 つのグループに分割する。

データの個数	第 1 グループ	第 2 グループ	第 3 グループ
$3n$	$n$	$n$	$n$
$3n+1$	$n$	$n+1$	$n$
$3n+2$	$n+1$	$n$	$n+1$

### ステップ2

第 1 グループの中で、 $x$  座標に着目したときの中央値(メジアン)を  $x_1$ 、 $y$  座標に着目したときの中央値を  $y_1$  とし、点  $P_1(x_1, y_1)$  を定める。また、同様に、第 2、第 3 グループにおいても点  $P_2(x_2, y_2)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$  を定める。

### ステップ3

点  $P_1(x_1, y_1)$ 、 $P_3(x_3, y_3)$  を結ぶ直線の式は

$$y = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}(x - x_1) + y_1 \quad \cdots (1)$$

である。第 2 グループの中央値  $x_2$  に対応する (1) 上の点の  $y$  座標を  $b$  とし

$$\frac{y_2 - b}{3} = d \text{ とする。 (1) に } d \text{ を加える。}$$

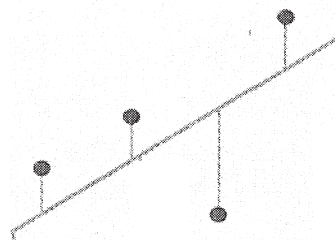
(『グラフ電卓で育てよう、数学を活かす力』東京書籍 p.172)

このようにして求めた直線を **メジアン-メジアン直線 (Med-Med 線)** という。

**問4** メジアン-メジアン直線を求め、2662 本が半減したときの死亡者数を予測しなさい。

**問5** 問4で求めたメジアン-メジアン直線の傾きと切片は、それぞれどのような意味があるかを答えなさい。

▶▶ 右の図を参考にして、メジアン-メジアン直線と、B さんやあなたが考えた直線のどれが適切かを判断する方法を考えよう。



**問6** 次の問に答えなさい。

① 問3でBさんが求めた直線の式について、下の表を完成しなさい。

1年間の1人あたりの喫煙本数	10万人あたりの心筋梗塞死亡者数 (①)	Bさんの式の値 (②)	①-②
3900	265		
3350	212		
3220	238		
3220	212		
2790	194		
2780	160		
2770	187		
2290	111		
2160	208		
1890	150		
1810	125		
1800	41		
1770	182		

② 問4で求めたメジアン-メジアン直線について、下の表を完成しなさい。

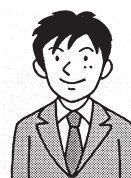
1年間の1人あたりの喫煙本数	10万人あたりの心筋梗塞死亡者数 (①)	メジアン-メジアン直線の値 (②)	①-②
3900	265		
3350	212		
3220	238		
3220	212		
2790	194		
2780	160		
2770	187		
2290	111		
2160	208		
1890	150		
1810	125		
1800	41		
1770	182		

③ メジアン-メジアン直線と、Bさんの考えた直線では、どちらが適切だと考えられるか。あなたの考えを書きなさい。



差もグラフに表してみようかしら。

差の合計に着目してみよう。

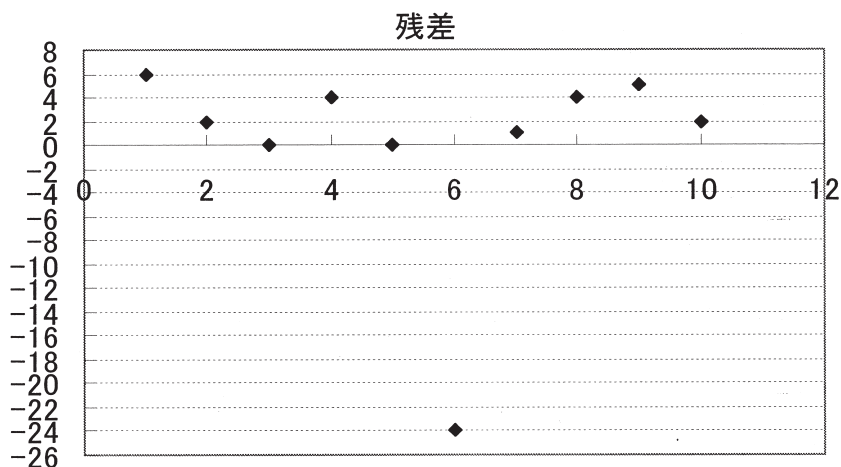


問 6 で調べたような、実際の値と式から得られる値との差のことを**残差**という。

**問 7** 残差の和を調べることの長所と短所をあげなさい。

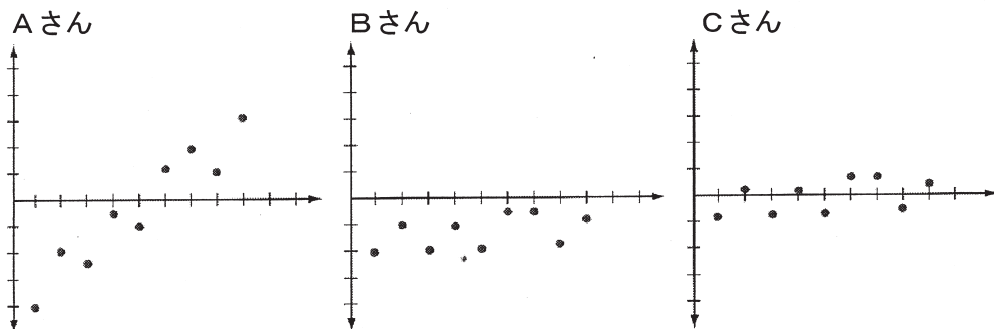
問 7 では、残差の和を考えることの長所と短所について考えた。

残差の和だけで判断することは、例えば、右のような場合も残差の和が 0 になってしまうので、危険である。このようなことを防ぐためには、残差の 2 乗の和に着目するとよい。



**問 8** 問 6 の①, ②について、残差の 2 乗を求め、それぞれの和を比較しなさい。

**問 9** A さん, B さん, C さんの 3 人は、あるデータにあてはまる直線を求めて、その残差のグラフを表示したところ、下のようになった。それぞれの求めた直線について、どんなことが言えるか。





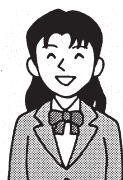
## やってみよう！

## 禁煙を促すプレゼンテーションをしよう

たばこの禁煙によって、多くの病気のリスクが低下する。肺がんなどの場合は、禁煙者のリスクが、もともとの非喫煙者のリスクと同じところに下がるまで、10年以上の長期間かかると言われている。これに対して、心臓病（心筋梗塞）の場合は、禁煙によるリスクの低下がすぐに始まり、3～5年で、もともとの非喫煙者のリスクと同じところまで下がると考えられている。すなわち、「強力なたばこ対策を行えば、その直後から心臓病による死亡率は下がる」のである。逆に言うと、「たばこ対策の遅れは、生命の損失に即座に直結する」ことになる。

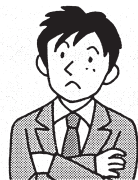
参考：<http://www.metamedica.com/news2000/2000121701.html>

これまでのデータを使ったり、さらに必要に応じて別のデータを集めたりして、禁煙を促すプレゼンテーションをしよう。



私の父は、1日に1箱を吸うと言っていたわ。

1日に20本吸っていた人が1日5本に減らすと、心臓病になる危険性はどのくらい変わるのかな。



## やってみよう！

## ピサの斜塔

ピサの斜塔は、1173 年から建設が開始され、14 世紀中ごろに完成した。着工時には垂直であったが、工事中の 13 世紀には傾いていることが発覚した。その傾斜の原因は、地盤の土質が不均質であったことだと考えられている。塔の南側の土質が相対的にやわらかく、年月を経るうちに傾き始め、そのことにより、ますます地盤に対する負担が大きくなり、沈下が進行するという悪循環に陥ったのである。

1935 年には、地下水が地盤をやわらかくしてしまうのを防ぐため薬液を注入して地下水の浸入を止めようとする処置がとられた。しかし、攪乱によって強度が著しく低下し、沈下はさらに進んでしまった。1960 年代、現地の地下水汲み上げによって地下水位が下がり、またも傾斜進行という危機を迎え、1964 年 2 月 27 日、ついに、イタリア政府はピサの斜塔を崩壊から回避するための支援を求めた。しかし、1970 年代以降も、傾斜の進行は止まらなかった。

**問 1** 右の表は、1975 年から 1987 年の塔の傾きの度合いを、塔のある地点から垂線を下ろしたときの最下部との間に生じる長さで表したものである。この表をもとに、2000 年の傾きを予測しなさい。

年	傾き (mm)
1975	2964.2
1976	2964.4
1977	2965.6
1978	2966.7
1979	2967.3
1980	2968.8
1981	2969.6
1982	2969.8
1983	2971.3
1984	2971.7
1985	2972.5
1986	2974.2
1987	2975.7



ピサの斜塔は、1990 年 1 月 7 日、安全上の問題により公開を休止し、傾斜角を是正するために改修工事が行われた。改修工法には世界各国の建設会社からさまざまな提案がなされたが、最終的に、北側の地盤を掘削するという工法が採られた。

この結果、2001 年 12 月 15 日、約 12 年ぶりに一般公開された。総経費約 32 億円をかけ、垂直状態からおよそ 4.5m 傾いていたものを、40.6cm 修正したという。

㊦ 工事の前には、ピサの斜塔は垂直状態から 4.5m 傾いていたということである。この値とデータを用いて予測した値と比較しよう。

## 2

## 回帰直線

シャーロック・ホームズシリーズは、イギリスの作家、アーサー・コナン・ドイル (Sir Arthur Conan Doyle, 1859 – 1930) によって書かれた有名な推理小説である。シャーロック・ホームズは、その主人公で天才的な観察眼と推理力を持つ探偵である。

そのシリーズの最初の作品である『緋色の研究』の中で、ホームズが、「犯人は身長 6 フィート以上の壮年、身長に似あわず足が小さい」などの推理の根拠を説明している場面があるが、その中でホームズは、犯人の身長を推理するために歩幅を利用している。

**??** 歩幅と身長の関係について探究し、ホームズの推理に迫ろう。

**Q** どのようなデータを、どのようにして集めたらよいかを話し合ってみよう。



**問 1** 自分たちの考えた方法でデータを集め、歩幅が 50cm の人の身長を予測しなさい。

1 の問 8 (67 ページ) では、残差の 2 乗の和に着目した。この残差の 2 乗の和が最小になるように、直線の式を決める方法がある。それは、次の通りである。

求める直線を  $y = ax + b$  とおくと、データ

$(x_i, y_i)$  に対して、その残差  $d_i$  は

$$d_i = y_i - (ax_i + b)$$

となる。したがって、残差の 2 乗の和は

$$\sum d_i^2 = \sum \{y_i - (ax_i + b)\}^2$$

これを展開して整理すると

$$\sum d_i^2 = [A](a + [B]b + [C])^2 + [D](b + [E])^2 + [F] \quad \dots (1)$$

となる。

ここで、 $[A] > 0$ 、 $[D] > 0$  となるので、残差を最小にするには、2 つの  $( )^2$  が 0 になるように  $a$ 、 $b$  を決めればよいことになる。すなわち

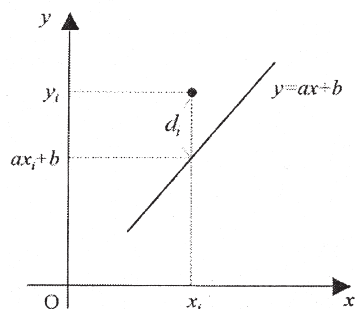
$$b = -[E] = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = [B][E] - [C] = \frac{n \sum x_i y_i + \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

このとき、(1) は  $[F]$ 、すなわち

$$\sum d_i^2 = (1 - r^2) \sum (y_i - \bar{y})^2$$

となるので、残差の 2 乗の和は、 $r^2$  が 1 に近いほど、すなわち、相関係数  $r$  の絶対値が 1 に近いほど小さくなることがわかる。



$$[A] = \sum x_i^2$$

$$[B] = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$[C] = -\frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

$$[D] = n - \frac{(\sum x_i)^2}{\sum x_i^2}$$

$$[E] = \frac{-\sum x_i^2 \sum y_i + \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

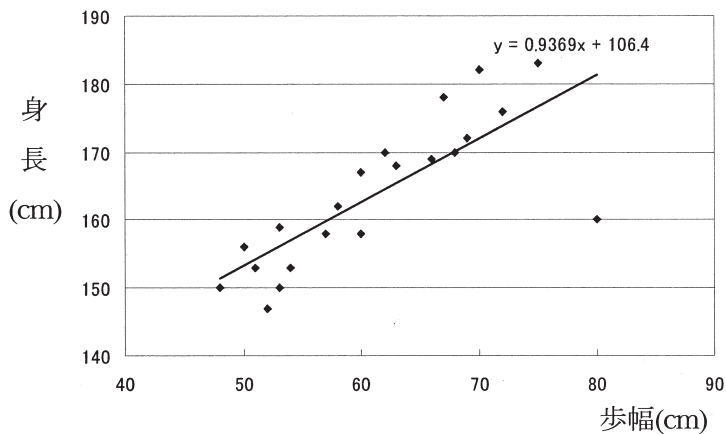
$$[F] = (1 - r^2) \sum (y_i - \bar{y})^2$$

ただし、 $n$  はデータの個数、 $\bar{y}$  はデータ  $y_i$  の平均、 $r$  は相関係数

この方法を**最小 2 乗法**、求める直線を最小 2 乗法による**回帰直線**という。しかし、この  $a$ 、 $b$  の値を手計算で求めるのは容易なことではない。そこで、グラフ電卓や表計算ソフトには、この直線を求める機能が組み込まれている。それらを利用すれば、瞬時に、最小 2 乗法による回帰直線を求めることができる。

**問 2** 自分たちの集めたデータについて、グラフ電卓や表計算ソフトを利用して、最小 2 乗法による回帰直線を求めなさい。

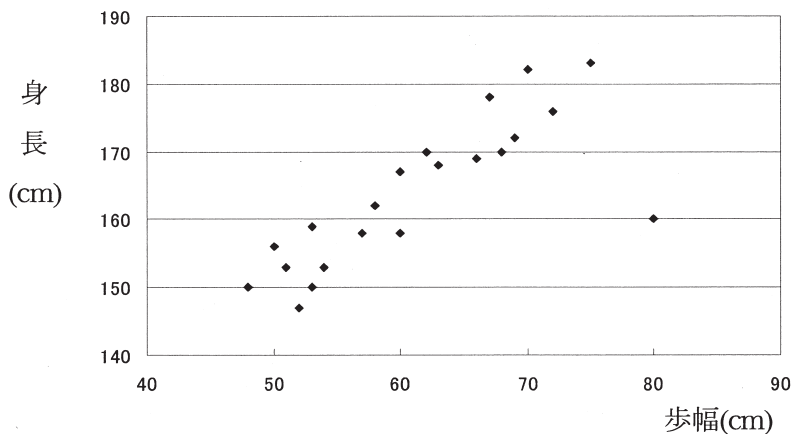
- 問3** 右の表と下の図は、Bさんのグループの集めたデータである。次の会話文を読んで、あとの問に答えなさい。
- Bさん「私はメジアン－メジアン直線で求めてみたわ。」
- Aさん「ぼくは、コンピュータで回帰直線を求めたよ。」



歩幅	身長
48	150
50	156
51	153
52	147
53	150
53	159
54	153
57	158
58	162
60	167
60	158
62	170
63	168
66	169
67	178
68	170
69	172
70	182
72	176
75	183
80	160

- Bさん「私は、変化の割合はア) \_\_\_\_\_ になったわ。」
- Cさん「Bさんのグラフは？」
- Bさん「イ) 私のグラフはこんな感じよ。」
- Aさん「ウ) ぼくのグラフでは、身長が60cm以上のデータがほとんど直線より上になっているけど、Bさんの直線ではそのようなことはないね。」

- ① 下線部ア) にあてはまる値を求めなさい。
- ② 下のグラフに、下線部イ) のBさんのグラフをかき入れなさい。



- ③ 下線部ウ) のようなことが生じた理由を考えなさい。

問3のデータのうち、(80, 160)のように、全体の傾向と大きくずれた値のことを**はずれ値**ということがある。最小2乗法による回帰直線は、メジアン-メジアン直線に比べて、このようなはずれ値の影響を受けやすい。

また、はずれ値が存在するときは、その原因を確かめるとともに、場合によっては、そのデータを除外するというを考えてもよい。

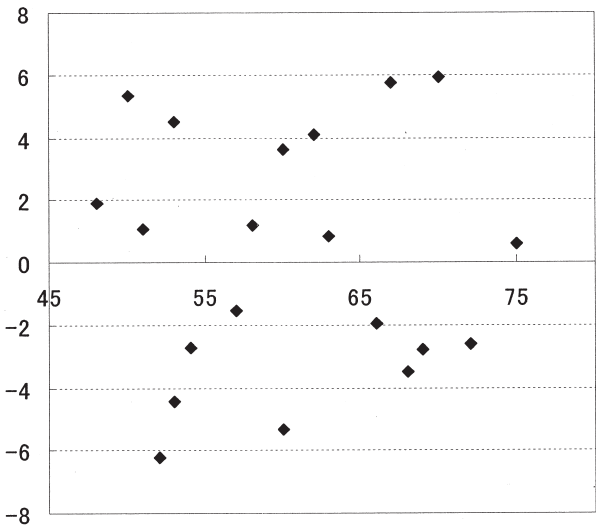
☺☺はずれ値が、全データの中央付近にある場合と、端の方にある場合とでの、最小2乗法による回帰直線に与える影響の違いを調べてみよう。

▶▶回帰曲線から得られる値を、どのように解釈して、身長を予測したらよいだろうか。

例えば、歩幅が65cmの人の身長を、問3のデータで考えてみよう。ここでは、(80, 160)は除外して考えることにする。このとき、最小2乗法による回帰直線は  $y = 1.27x + 87.16$  となるので、身長は  $x = 65$  を代入したときの値のおよそ170cmと予測してよいだろうか。

**問4** 下の表と散布図は、残差を表している。これらを参考にとすると、歩幅が65cmの人の身長は、何cm以上何cm以下と予測するとよいか。あなたの考えを書きなさい。

歩幅	身長	式の値	残差
48	150	148.12	1.88
50	156	150.66	5.34
51	153	151.93	1.07
52	147	153.2	-6.2
53	150	154.47	-4.47
53	159	154.47	4.53
54	153	155.74	-2.74
57	158	159.55	-1.55
58	162	160.82	1.18
60	167	163.36	3.64
60	158	163.36	-5.36
62	170	165.9	4.1
63	168	167.17	0.83
66	169	170.98	-1.98
67	178	172.25	5.75
68	170	173.52	-3.52
69	172	174.79	-2.79
70	182	176.06	5.94
72	176	178.6	-2.6
75	183	182.41	0.59



(80, 160) のような値を除外せずに考えた場合は、どのように範囲を決めればよいだろうか。

残差の**標準偏差**を用いる方法がある。標準偏差とは、データの散らばり具合を示す数値のことで、各データを  $x_i$ 、平均を  $\bar{x}$  とするときの  $x_i - \bar{x}$  の 2 乗の和の平均の平方根、すなわち

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

の  $\sigma$  として得られる。グラフ電卓や表計算ソフトには、この値を求める関数が組み込まれているので、それらを用いれば、容易に標準偏差を求めることができる。そして、データのおよそ 95% は  $\pm 2\sigma$  の範囲内に存在することがわかっている。

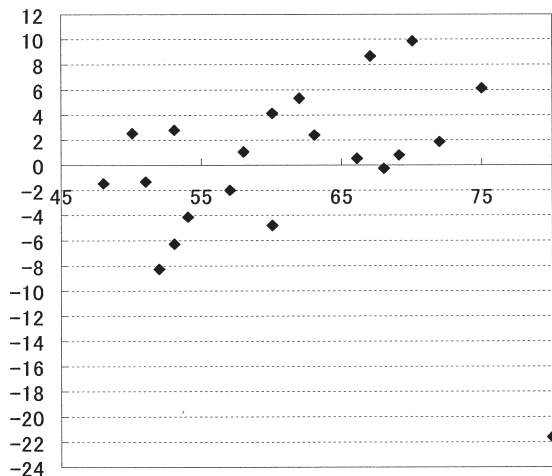
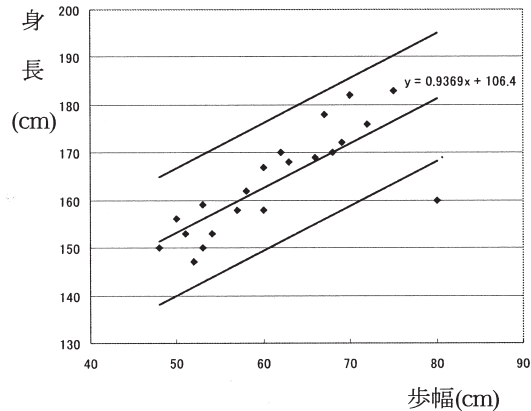
下の表のように、(80, 160) を含めた際の残差の標準偏差は 6.7 なので、残差のデータの 95% は  $-13.4$  から  $+13.4$  の範囲にあることになる。したがって、歩幅から身長を予測する際には、回帰直線の式から得られる値の  $\pm 13.4$  の範囲を考えればよい。

歩幅	身長	式の値	残差
48	150	151.52	-1.52
50	156	153.4	2.6
51	153	154.34	-1.34
52	147	155.28	-8.28
53	150	156.22	-6.22
53	159	156.22	2.78
54	153	157.16	-4.16
57	158	159.98	-1.98
58	162	160.92	1.08
60	167	162.8	4.2
60	158	162.8	-4.8
62	170	164.68	5.32
63	168	165.62	2.38
66	169	168.44	0.56
67	178	169.38	8.62
68	170	170.32	-0.32
69	172	171.26	0.74
70	182	172.2	9.8
72	176	174.08	1.92
75	183	176.9	6.1
80	160	181.6	-21.6

残差の標準偏差 6.7

⇒⇒ 標準偏差は、 $x_i - \bar{x}$  の和の平均、すなわち、 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})$  ではなく、

$x_i - \bar{x}$  の 2 乗の和の平均で定義されているのはなぜだろうか。



## やってみよう！ イチョウの黄葉日

---

秋の観光と言えば、紅葉（黄葉）である。その時期を予測することは、観光の計画を立てる上でも、また、観光業者にとっても、不可欠である。

過去のデータをもとにして、今年のイチョウの黄葉日を予測しよう。

なお、例えば

東京のイチョウの過去の黄葉日は

[http://www.tokyo-jma.go.jp/sub\\_index/kiroku/kiroku/data/48.htm](http://www.tokyo-jma.go.jp/sub_index/kiroku/kiroku/data/48.htm)

過去の気温に関するデータは

<http://www.data.jma.go.jp/obd/stats/etrn/index.php>

で、それぞれ得られる。

11 月になったら  
やってみよう！





### 3 データの線形化

オーディオ機器の進歩には、目をみはるものがある。1980 年代後半は、カセットテープが主流だったが、その後、MD に、そして、ここ数年は iPod に代表されるメモリやハードディスク型のものが主流となっている。

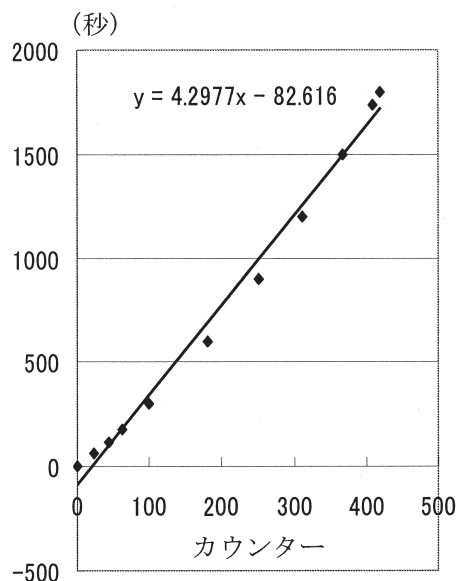
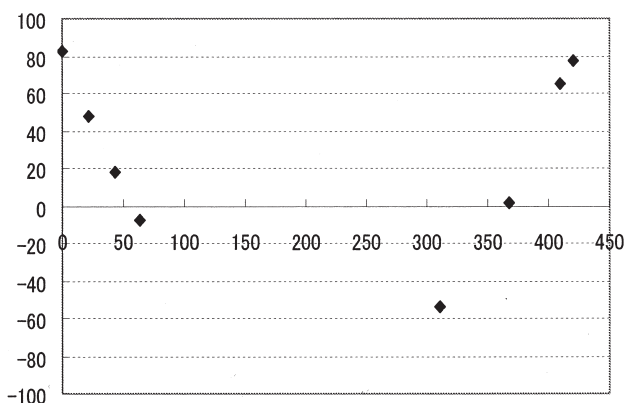
あなたの家にもあまり聴かなくなったカセットテープがあるのではないだろうか。そのようなカセットテープに録音された音楽を、MD にコピーしたい。カセットテープのデッキには、テープの進行具合の目安としてカウンターが付いているが、これを見ただけでは、1 曲の時間やテープの残り時間などはわからない。カウンターの値から、時間を求められると、便利である。

下の表は、あるカセットデッキのカウンターの値と時間の関係を表している。

カウンター	0	22	43	63	100	180	250	311	368	409	420
時間 (秒)	0	60	120	180	300	600	900	1200	1500	1740	1800

**??** カセットデッキのカウンターの値と時間の関係は、どのような関数で表せるだろうか。カウンターの値から時間を求めるための式をつくってみよう。

**Q** データをプロットし、最小 2 乗法による回帰直線を求めてみたところ、右のようになった。残差を表した下のグラフを完成させ、1 次関数になるかどうかを考えよう。



- 問1** Aさんは、となり合ったデータ間の変化の割合がだんだん大きくなっていることから、2次関数で表すことを考えた。そして、 $x$  をカウンターの値、 $y$  を時間として、下のように、表に $\frac{y}{x}$ の値を書き加えた。

$x$	0	22	43	63	100	180	250	311	368	409	420
$y$	0	60	120	180	300	600	900	1200	1500	1740	1800
$\frac{y}{x}$		2.73	2.79	2.86	3.00	3.33	3.60	3.86	4.08	4.25	4.29

- ① 各 $(x, \frac{y}{x})$  をプロットし、最小2乗法による回帰直線を求めなさい。
- ② ①をもとに、カウンターの値 $x$ と時間 $y$ の関係を表す2次関数を求めなさい。

①の直線は、 $\frac{y}{x} = ax + b$

を表していることになるよ！

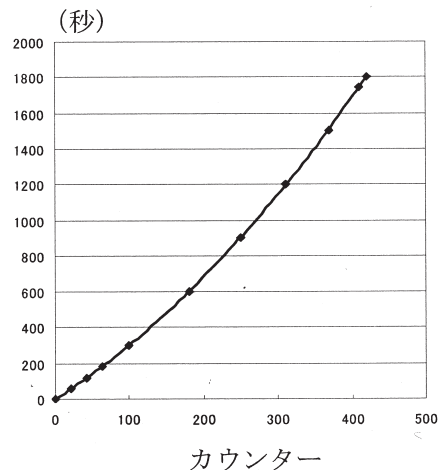


問1でAさんは、もとのデータ $(x, y)$ を、 $(x, \frac{y}{x})$ と変換して、それに対して最小2乗法による回帰直線を求めている。

このように、1次関数以外の関数であることが予測されるときは、もとのデータを、さまざまな工夫をして変換し、回帰直線を求め、再び変換し直すことで、適切な関数が求められることがある。これをデータの線形化という。

問1の②の結果をグラフにすると、右のようになる。

- 問2** 前のページのデータで、 $(x, y)$ を、 $(x, \sqrt{y})$ と変換することで、カウンターの値 $x$ と時間 $y$ の関係を表す2次関数を求めなさい。



グラフ電卓や表計算ソフトの多くには、1次関数以外のさまざまな関数を指定して回帰する機能がある。それらを用いれば、データを線形化する必要はない。しかし、データを線形化し、それらをプロットした点を調べることで、もとのデータをある関数で表すことが適切かどうかを判断しやすくなる。

## 第2節 確率

---

### 1 確率

数字選択式の宝くじであるナンバーズ3やナンバーズ4について考えてみよう。  
ナンバーズ3は好きな3つの数を、ナンバーズ4は好きな4つの数を選ぶもので、それぞれ申し込みのタイプとして、「ストレート」、「ボックス」、「セット」がある。

ストレート	すべての数字と並びの順序が一致
ボックス	数字が一致すれば並びの順序は問わない
セット	ストレートとボックスに半分ずつ申し込むもの

ナンバーズ3にはこの他に「ミニ」というタイプもある。これは下2桁の数字と並びの順序が一致するものである。

**??** 年末ジャンボ宝くじの1等の当せん確率は  $\frac{1}{10,000,000}$  であるが、ナンバーズ4のストレートの当せん確率はこれよりも大きいのだろうか、それとも小さいのだろうか。

▶▶ ナンバーズ4で、ストレートの申し込み方は何通りあるだろうか。

ナンバーズ4の4つの数の選び方について

最初の数は、0から9までの10通りの選び方がある。

その各々に対して、次の数の選び方は同じく0から9までの10通りである。

その各々に対して、3番目の数の選び方も10通り、4番目の数の選び方も10通りである。

したがって、4つの数の選び方は

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000 \quad (\text{通り})$$

である。

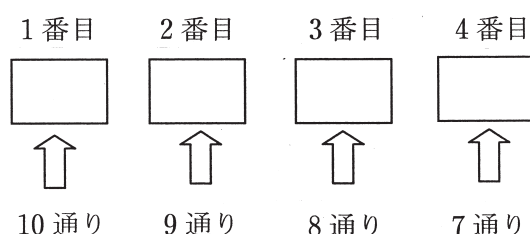
一般に、場合の数について、次の **積の法則** が成り立つ。

### 積の法則

2 つのことがら  $A, B$  について、 $A$  の起こり方が  $m$  通りあり、その各々の起こり方に対して  $B$  の起こり方が  $n$  通りあるとき、 $A, B$  がともに起こる場合の数は  $m \times n$  通りである。

▶▶ ナンバーズ4で、4つの数字がすべて異なるようにストレートを申し込むとき、何通りの選び方があるだろうか。

最初の数から考えてみよう。ここで選ぶ数は0から9までの数のどれでもよいので、選び方は10通りある。2番目は、最初に選んだ数以外であればどれでもよいので、選び方は9通りある。同様に、3番目の数の選び方は8通り、4番目の数の選び方は7通りある。



したがって、異なる数字でストレートを申し込む場合の数は、積の法則から

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040 \text{ (通り)}$$

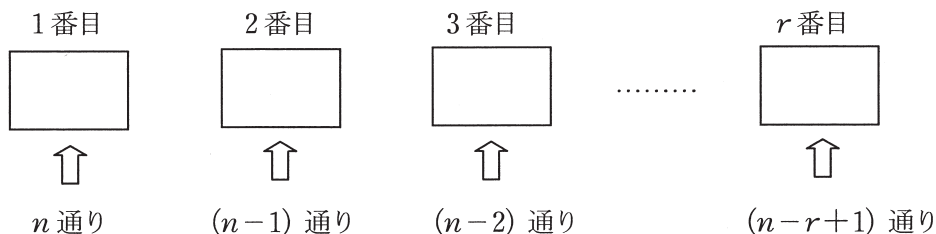
となる。

この問題は、10個の数字から4個の数字を選んで1列に並べる並べ方の総数を求めたことと同じである。

異なる  $n$  個のものから  $r$  個とって1列に並べたものを、 **$n$  個のものから  $r$  個とった順列**といい、その総数を  ${}_nP_r$  で表す。したがって、上の場合は、次のように表される。

$${}_{10}P_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

一般に、異なる  $n$  個のものから  $r$  個とって並べるとき、並べるものの選び方は



となる。したがって、 ${}_nP_r$  は積の法則により次のように書ける。

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

**問1** 次の値を求めなさい。

- ①  ${}_5P_2$                       ②  ${}_6P_4$                       ③  ${}_7P_3$

**問2** ナンバーズ3ですべての数字が異なるようにストレートを申し込むとき、何通りの選び方があるか。

**??** ナンバーズ4のストレートを申し込むとき、  
当せんしやすい番号はあるのだろうか。

1111 や 1234 は当せん  
しにくい気がするわ。



### ◆◆試行と事象◆◆

同じ条件の下で何回も繰り返すことができ、しかも、どの結果が起こるかが偶然に決まるような実験や観察などを **試行** という。

ある試行において、起こり得る結果の全体の集合を **全事象** といい、 $U$  で表す。また、全事象の部分集合を **事象** という。とくに、 $U$  の1個の要素だけからなる部分集合で表される事象を **根元事象** という。

**例1** ナンバーズ4を行うことは試行であり、ストレートの申し込み方全体の集合が全事象である。このとき、それぞれの申し込み方が根元事象である。

すなわち、たとえば「1234」を申し込むときを単に 1234 で表すことにすると、この試行の全事象  $U$  は

$$U = \{0000, 0001, 0002, \dots, 9997, 9998, 9999\}$$

で、このときの根元事象は

$$\{0000\}, \{0001\}, \{0002\}, \dots, \{9997\}, \{9998\}, \{9999\}$$

である。

このように、すべての事象はいくつかの根元事象からなる。根元事象を1つも含まないものも事象と考え、これを **空事象** といい、 $\phi$  で表す。空事象は決して起こらない事象である。

## ◆◆事象の確率◆◆

一般に、ある試行において、起こりうるすべての結果が同じ程度に起こると期待できるとき、その試行の1つの結果からなる根元事象は **同様に確からしい** という。

**例2** ナンバーズ4でストレートを申し込むときの根元事象

{0000}, {0001}, {0002}, …… , {9997}, {9998}, {9999}

は、この中のどれかが特別に当せんしやすいということはいえない。

したがって、これらは同様に確からしい。

ある試行において、起こり得るすべての結果が  $N$  個あり、各結果からなる根元事象は同様に確からしいとする。

この試行における全事象  $U$  の根元事象の個数は、 $n(U) = N$  である。

ここで、事象  $A$  の根元事象の個数を  $n(A) = a$  とするとき、事象  $A$  の確率を  $\frac{a}{N}$  で定め、 $P(A)$  と書く。

### 事象の確率

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こり得るすべての場合の数}}$$

**練習1** ナンバーズ3でストレートが当せんする確率は、ナンバーズ4でストレートが当せんする確率の何倍か。

**??** 下のように、AさんとBさんがナンバーズ3のボックスをそれぞれ2通り申し込んだ。どちらの方が当せんする確率が高いだろうか。

Aさんの購入券    1 2 4        4 6 4

Bさんの購入券    8 9 5        2 4 7

**Q** Aさんの購入券のうち、124がボックスで当せんするのは、抽せんされるのがどんな数のときだろうか。すべて書き出してみよう。

このときの場合の数は、3つの数字「1, 2, 4」の順列を考えればよいので、全部で

$${}_3P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6 \quad (\text{通り})$$

あることになる。

${}_nP_r$ において、とくに  $r=n$  の場合は

$${}_nP_n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

となる。これは、“ $n$  個の異なるものをすべて並べた順列の総数”である。この右辺の1から  $n$  までの整数の積を、 $n$  の **階乗** といい、 $n!$  で表す。すなわち

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

この記号を用いると、 ${}_nP_n = n!$  となる。

$0 < r < n$  のとき

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(n-r) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-r) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

であるから、 ${}_nP_r$  は階乗の記号を用いると、次のように書くことができる。

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \cdots \cdots (1)$$

また、(1)の式で  $r=n$  とすると、 ${}_nP_n = \frac{n!}{0!}$  となるが、 ${}_nP_n = n!$  であるから、(1)が

$r=n$  のときにも成り立つように  $0! = 1$  と定める。

さらに、(1)が  $r=0$  のときにも成り立つように  ${}_nP_0 = 1$  と定める。

▶▶ボックスでは「124」を選んだとき、「142」が抽せんされても「412」が抽せんされても当せんとなる。では、3つの数字がすべて異なるようにボックスを申し込むとすると、3つの数字の選び方は何通りあるだろうか。

順列を利用して考えてみよう。

例えば、 $\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}$  を選んで、これを並べてみると

$$\boxed{0}\boxed{1}\boxed{2}, \quad \boxed{0}\boxed{2}\boxed{1}, \quad \boxed{1}\boxed{0}\boxed{2}, \quad \boxed{1}\boxed{2}\boxed{0}, \quad \boxed{2}\boxed{0}\boxed{1}, \quad \boxed{2}\boxed{1}\boxed{0}$$

の6通り、すなわち  $3!$  通りの順列ができる。

他の数の選び方についても同様に、 $3!$  通りの順列ができる。

これらをすべて集めると、10個の数字から3個の数字を選んで並べる順列のすべてが得られるから、次の式が成り立つ。

$$\text{取り出し方の総数} \times 3! = \text{順列の総数}$$

0 1 2	0 1 2	0 2 1	1 0 2	1 2 0	2 0 1	2 1 0	…3! 通り
0 1 3	0 1 3	0 3 1	1 0 3	1 3 0	3 0 1	3 1 0	…3! 通り
0 1 4	0 1 4	0 4 1	1 0 4	1 4 0	4 0 1	4 1 0	…3! 通り
0 1 5	0 1 5	0 5 1	1 0 5	1 5 0	5 0 1	5 1 0	…3! 通り
0 1 6	0 1 6	0 6 1	1 0 6	1 6 0	6 0 1	6 1 0	…3! 通り
0 1 7	0 1 7	0 7 1	1 0 7	1 7 0	7 0 1	7 1 0	…3! 通り
0 1 8	0 1 8	0 8 1	1 0 8	1 8 0	8 0 1	8 1 0	…3! 通り
0 1 9	0 1 9	0 9 1	1 0 9	1 9 0	9 0 1	9 1 0	…3! 通り
…	…	…	…	…	…	…	
6 8 9	6 8 9	6 9 8	8 6 9	8 9 6	9 6 8	9 8 6	…3! 通り
7 8 9	7 8 9	7 9 8	8 7 9	8 9 7	9 7 8	9 8 7	…3! 通り

${}_{10}P_3$   
通り

したがって、10個の数字から3個の数字を選ぶときの選び方の総数は

$$\frac{{}_{10}P_3}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120 \text{ (通り)}$$

このように、並べる順序を考えに入れずに取り出した1組を **組合せ** という。一般に、 $n$ 個の異なるものから、 $r$ 個を取り出してつくった組合せを

**$n$ 個のものから $r$ 個とった組合せ**

といい、その総数を  ${}_nC_r$  で表す。上の例の場合  ${}_{10}C_3 = 120$  と表せる。

${}_nC_r$  は、 ${}_nC_r$  通りの各組合せに対して、並べ方が  $r!$  通りあり、並べ方を考えた総数は  ${}_nP_r$  であるから

$${}_nC_r \times r! = {}_nP_r$$

が成り立つ。したがって、 ${}_nC_r$  は次のように書ける。

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

**組合せ**

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

この式が  $r=0$  に対しても成り立つように、 ${}_nC_0 = 1$  と定める。

**問3** 次の値を求めなさい。

①  ${}_5C_2$

②  ${}_6C_4$

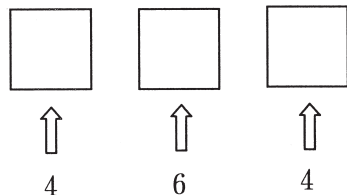
③  ${}_7C_3$



**Q** Aさんの購入券のうち、464がボックスで当せんするのは、抽せんされるのがどのような数のときだろうか。すべて書き出してみよう。

このときの場合の数は、「464」の順列を考えればよいのだが、4が2つ含まれている。

4, 4, 6の3つの数字を1列に並べる並べ方の総数は、右の図のように、3つの場所から2つを選んで数字4を入れ、残りの1つに数字6を入れる場合の数に等しい。



よって、求める並べ方の総数は、積の法則から

$${}_3C_2 \times {}_1C_1 = 3 \text{ (通り)}$$

となる。

**問4** ナンバーズ4で、1, 2, 2, 4を選んでストレートを申し込むとき、異なる選び方は何通りあるか。

7つの文字、a, a, a, a, b, b, cのすべてを1列に並べる場合の並べ方の総数は

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \times 1 = 105 \text{ (通り)}$$

である。これを階乗の記号を用いると次のようになる。

$${}_7C_4 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{7!}{4!3!} \times \frac{3!}{2!1!} = \frac{7!}{4!2!1!}$$

一般に、aがp個、bがq個、cがr個の合計n個のものをすべて並べる並べ方の総数は次のようになる。

$${}_nC_p \times {}_{n-p}C_q \times {}_{n-p-q}C_r = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし } p+q+r=n$$

同じものを含む順列

**Q** 81ページの??のAさんの購入券が当せんする確率を求めてみよう。

## ◆◆排反事象◆◆

Aさんの購入券について、ストレートでもボックスでも124と464が同時に当せんとなることはない。

一般に、2つの事象  $A$ ,  $B$  が同時に起こることがないとき、 $A$  と  $B$  は互いに **排反** である、または **排反事象** であるという。このとき、 $A$  と  $B$  の積事象は空事象である。すなわち、 $A \cap B = \emptyset$  である。

したがって

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

が成り立つ。

$A$  と  $B$  が排反事象のときの和事象  $A \cup B$  の確率は、上の式の両辺を全事象の個数  $n(U)$  で割ることによって

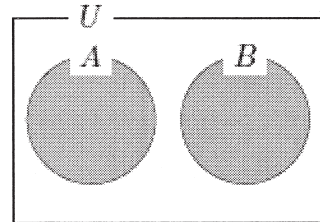
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

となる。これは確率の **加法定理** と呼ばれている。

確率の加法定理は、3つ以上の排反事象に対しても同様に成り立つ。

例えば、互いに排反である3つの事象  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の和事象の確率は、次のようになる。

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$



**問5** Aさんの購入券が当せんする確率を、次の手順で求めなさい。

- ① Aさんの購入券のうち、「124」がボックスで当せんする確率を求めなさい。
- ② Aさんの購入券のうち、「464」がボックスで当せんする確率を求めなさい。
- ③ Aさんの購入券が当せんする確率を求めなさい。

**問6** 81ページの??のBさんの購入券が当せんする確率を求め、Aさんの購入券が当せんする確率と比較しなさい。

**練習2** ナンバーズ4で、「7462」と「8757」をボックスで申し込んだ券がある。この券が当せんする確率を求めなさい。

▶▶先の結果を受けての A さんと B さんの会話である。

A 「なるほど、同じ番号のものを含んだ方がボックスの場合当せん確率は低くなるのか。  
ではボックスを申し込むときは同じ数字を含まないような番号を選択した方がいいんだね。」

B 「選んだ数字が当選するかどうかの確率は確かにそうだけど、どんな数字が抽せんされるのか、というのは別の話だよ。」

A 「ん？どういうこと？」

B 「抽せんされる数字がすべて異なる確率と、同じ数字が含まれる確率を求めてみれば分かると思うよ。」

**問7** ナンバーズ3において、抽せんされる3つの数字がすべて異なる確率を求めよ。

### ◆◆余事象とその確率◆◆

ある試行における全事象を  $U$ 、ある事象を  $A$  とする。 $U$ 、 $A$  の根元事象の個数は、それぞれ  $n(U)$ 、 $n(A)$  となり

$$0 \leq n(A) \leq n(U)$$

が成り立つ。この式の各辺を  $n(U)$  で割ると  $0 \leq \frac{n(A)}{n(U)} \leq 1$  となる。すなわち

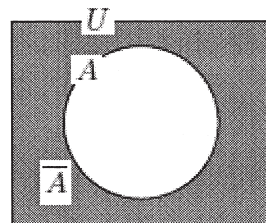
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

とくに全事象  $U$  と空事象  $\phi$  に対して

$$P(U)=1, \quad P(\phi)=0$$

となる。

事象  $A$  に対して、“ $A$  が起こらない”という事象を  $A$  の**余事象**といい、 $\bar{A}$  で表す。また、事象  $\bar{A}$  の余事象は“ $A$  が起こる”という事象であり、事象  $A$  と同じである。



事象  $A$  と  $\bar{A}$  は互いに排反であるから、確率の加法定理により

$$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

また、 $A$  と  $\bar{A}$  の和事象は全事象  $U$  であり、 $P(U)=1$  であるから

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

となる。したがって、余事象  $\bar{A}$  の確率は次のようになる。

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

例えば、問7において、抽せんされる3つの数字が異なるという事象を  $A$  とすると、同じ数字が含まれるという事象は  $\overline{A}$  で表すことができる。

**問8** ナンバーズ3において抽せんされる3つの数字に同じ数字が含まれる確率を求め、問7で求めた確率と比較してみよ。どんなことがいえるか。

**練習3** ナンバーズ4において抽せんされる4つの数字が4つとも異なる確率と、同じ数字が含まれる確率を求めなさい。また、これらの確率を比較してどんなことがいえるか。

## 2 期待値

平成 18 年度のサマージャンボ宝くじが発売された。この宝くじは、100,000 番から 199,999 番までの 10 万通を 1 組として 01 組から 100 組までの計 1,000 万通を 1 ユニットとして、ユニットごとに順次売り出される。今年の販売予定額は 42 ユニットである。

さて、今年のサマージャンボ宝くじについて、次のような紹介記事があった。(42 ユニットの場⓪)

- ・1 等 2 億円が 42 本、2 等 1 億円が 126 本の合計なんと 168 本。去年の約 2 倍もの億万長者が誕生する。

そこで、平成 18 年度と平成 17 年度のサマージャンボ宝くじの概要を比較してみた。下の表は、1 ユニットで比較したもので、上段が 17 年度、下段が 18 年度のものである。

等級	本数	賞金
1 等	1 本	200,000,000 円
1 等の前後賞	2 本	50,000,000 円
1 等の組違い賞	99 本	100,000 円
2 等	1 本	100,000,000 円
	3 本	100,000,000 円
3 等	10 本	10,000,000 円
4 等	200 本	1,000,000 円
	100 本	1,000,000 円
5 等	100,000 本	3,000 円
6 等	1,000,000 本	300 円
ラッキーサマー賞	10,000 本	10,000 円
ハッピーサマー賞	10,000 本	10,000 円

?? あなたが宝くじを買うとしたら、17 年度のくじと 18 年度のくじのどちらを買いたいですか。

## ◆◆期待値◆◆

**例 1** 例えば、右の表のような総数 100 本のくじを考えてみよう。

いま、このくじを 1 本引くときに得られる賞金の平均は、賞金の総額をくじの総数で割ったものであるから

	賞金	本数
1 等	50 円	10 本
2 等	30 円	20 本
3 等	20 円	30 本
4 等	0 円	40 本

$$\frac{50 \times 10 + 30 \times 20 + 20 \times 30 + 0 \times 40}{100} = \frac{1700}{100} = 17 \quad (\text{円})$$

となる。これは

$$50 \times \frac{10}{100} + 30 \times \frac{20}{100} + 20 \times \frac{30}{100} + 0 \times \frac{40}{100} = 17 \quad (\text{円})$$

と考えることができる。

ここで、賞金額とそれが得られる確率は、右の表のようになる。

50 円, 30 円, 20 円, 0 円を獲得する事象を、それぞれ  $A_1, A_2, A_3, A_4$  とすると、賞金の平均金額は

賞金	50 円	30 円	20 円	0 円	計
確率	$\frac{10}{100}$	$\frac{20}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{40}{100}$	1

$$50 \times P(A_1) + 30 \times P(A_2) + 20 \times P(A_3) + 0 \times P(A_4)$$

と書け、1 回あたりに期待できる賞金額と見なすことができる。

一般に、ある試行において、事象  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  は排反事象で、そのうちどれか 1 つが必ず起こるものとするとき、確率  $P(A_1), P(A_2), P(A_3), \dots, P(A_n)$  を  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$  とすると、次の等式が成り立つ。

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

また、 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  が起こるとき、ある数量  $x$  がそれぞれ  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  という値をとるとする。このとき

事象	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$\dots$	$A_n$	
$x$ の値	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$	計
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$	$p_n$	1

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n$$

を、数量  $x$  の **期待値** という。

- 問1** 平成17年度と平成18年度のサマージャンボ宝くじの期待値をそれぞれ求め、どちらのくじの方が得であるか考えなさい。

次のようなさいころゲームをしてみよう。

- ・ さいころを何回か振り、出た目の和が得点となる。
- ・ ただし、目の和が10を超えたら得点は0点になる。
- ・ さいころは何度でも振ってよいし、いつやめてもよい。

**??** なるべく高得点をとるには、どんな戦略をとればよいだろうか、考えてみよう。

- Q** 現在の得点が次のとき、あなたならさらにさいころを振りますか。それともそこでゲームをやめますか。あなたの考えをいいなさい。

① 4              ② 6              ③ 8              ④ 10

- 問2** 現在の得点が6点のとき、次にさいころを振るときの得点の期待値を求めたい。下の表を完成させ、その期待値を求めなさい。

得点	7	8	9	10	0	計
確率						1

- 問3** このゲームの場合、得点が何点だったらもう一度さいころを振り、何点だったら振るのをやめる方がよいか考えてみなさい。

### 3 独立な試行の確率

プロ野球の日本シリーズは第7戦まであり、それまでにどちらかのチームが4勝すればそのチームが優勝となる。

この日本シリーズ第6戦のチケットを入手することができたが、第5戦までで勝負がついてしまうのではないかと心配している。

**??** 日本シリーズを戦う A, B 両チームの実力が全く互角であると仮定する。このときどちらかのチームが4連勝して日本シリーズが終わる確率はどれくらいだろうか。

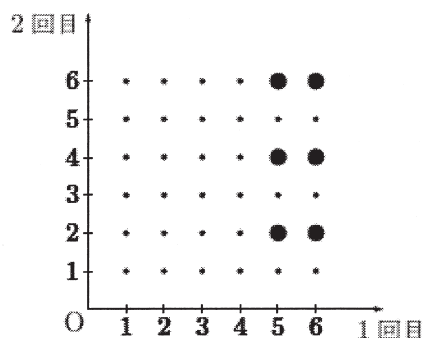
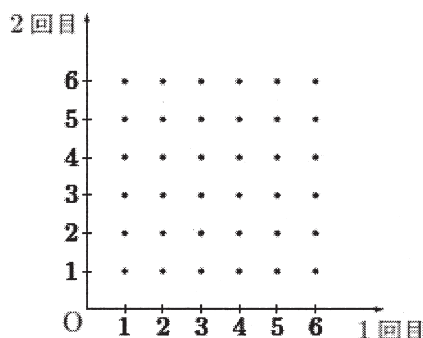
#### ◆◆独立な試行の確率◆◆

さいころを2回投げることを考えてみよう。このとき、1回目の目の出方は2回目の目の出方に影響を与えることはない。

このように、2つの試行  $T_1$ ,  $T_2$  について、それぞれの結果の起こり方が互いに影響を与えないとき、試行  $T_1$ ,  $T_2$  は **独立** であるという。

では、独立な試行の確率はどのようにして求められるだろうか。

例えば、さいころを2回投げるとき、1回目が5以上の目、2回目が偶数の目が出る確率を求めてみよう。





この2つの試行は独立であり、そのときの根元事象は

$$6 \times 6 = 36 \quad (\text{通り})$$

ある。ここで1回目が5以上の目で、2回目が偶数の目となるのは

$$2 \times 3 = 6 \quad (\text{通り})$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{2 \times 3}{6 \times 6} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$$

となる。

ここで

$$\frac{2}{6} \text{ は } 5 \text{ 以上の目が出る事象 } A \text{ の確率 } P(A)$$

$$\frac{3}{6} \text{ は偶数の目が出る事象 } B \text{ の確率 } P(B)$$

で、求める確率はこれらの積に等しくなっている。すなわち

$$P(A) \times P(B)$$

である。

一般に、次のことが成り立つ。

#### 独立な事象の確率

2つの試行 $T_1$ ,  $T_2$ が独立であるとき、 $T_1$ で事象 $A$ が起こり、 $T_2$ で事象 $B$ が起こる確率は

$$P(A) \times P(B)$$

**問1** 日本シリーズで戦うAチーム、Bチームの実力が全く互角であると仮定するとき、Aチームが4連勝して日本シリーズを終える確率を求めなさい。

**問2** 問1で、どちらかのチームが4連勝して日本シリーズを終える確率を求めなさい。

**??** 日本シリーズを戦う A, B 両チームの実力が全く互角であると仮定する。このときどちらかチームが 4 勝 1 敗で日本シリーズを終える確率はどれくらいか、考えてみよう。

**Q** A チームが 4 勝 1 敗で優勝するとき、勝敗のパターンは何通り考えられるでしょうか。すべて書きだしてみよう。

### ◆◆反復試行の確率◆◆

同じ条件のもとで同じ試行をくり返し行うとする。それらの試行が独立であるとき、これらの試行をまとめて **反復試行** という。

**例 1** 日本シリーズの問題で、毎回の試合はそれぞれ独立であると考えてよい。そのときに、4 勝 1 敗で A チームが優勝する事象の確率を求めてみよう。

A チームが 4 勝 1 敗で優勝するときの勝敗は、次の表のパターンになる。

試合 事象 \	第 1 戦	第 2 戦	第 3 戦	第 4 戦	第 5 戦
$A_1$	○	○	○	×	○
$A_2$	○	○	×	○	○
$A_3$	○	×	○	○	○
$A_4$	×	○	○	○	○

この表で、○は A チームが勝つことを表し、その確率は  $\frac{1}{2}$  であり、×は A チームが負けることを表し、その確率は  $\frac{1}{2}$  である。

ここで、 $A_1$  の確率は、各試合が独立であるから、次のようになる。

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2}$$

他の 3 つの事象も同様である。これら 4 つの事象は排反であるから、求める確率は

$$4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

例1は次のように考えることもできる。

A チームが4勝1敗で勝利する場合は、第1戦から第4戦までは3勝1敗で、第5戦目は必ずA チームが勝たなければならない。

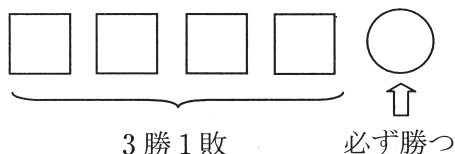
最初の4戦までが3勝1敗となるのは ${}_4C_3$ 通りあり、そのいずれも、勝つのが3回で負けるのが1回であるから、3勝1敗となる確率は、次のように表すことができる。

$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

第5戦目は必ずA チームが勝利するので、A チームが4勝1敗で優勝する確率は

$${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

と表すことができる。



一般に、反復試行について、次のことが成り立つ。

#### 反復試行の確率

ある試行において、事象Aが起こる確率を $p$ 、その余事象の確率を $q=1-p$ とする。

この試行を $n$ 回くり返す反復試行において、事象Aがちょうど $r$ 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r q^{n-r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, n)$$

である。ただし、 $p^0=1$ 、 $q^0=1$ とする。

**問3** 日本シリーズを戦うA、B両チームの実力が全く互角であると仮定する。このときどちらかのチームが4勝1敗で日本シリーズを終える確率を求めよ。

**問4** 問3と同様に、どちらかのチームが4勝2敗、4勝3敗で日本シリーズを終える確率をそれぞれ求め、今までの考察をもとに下の表を完成せよ。

勝敗	4勝	4勝1敗	4勝2敗	4勝3敗
確率				

**問5** 第6戦のチケットを購入した人が、「第5戦までで勝負がついてしまうのではないか。」と心配している。これについてどう考えられるか、問4の表をもとに判断しなさい。

**問6** 右の表は、1950年から2005年まで56回行われた日本シリーズで、シリーズが終了したときの勝敗について、それぞれが何回あったかを表したものである。この表と問4の表とを比べ、どのようなことがいえるか考えなさい。

勝敗	試合数
4勝	7
4勝1敗	13
4勝2敗	18
4勝3敗	18

## 4 条件つき確率

男子 20 人の中から誰か 2 人を委員として選出しなければならなかったが、立候補者が 1 人も出なかった。そこでくじ引きでその委員を決めることにした。20 本のくじの中に当たりくじを 2 本入れ、それを順番に引いていくことにした。もちろん、引いたくじは元には戻さない。

いざくじ引きをしようというとき、「くじの順番も大切だから順番を決めるくじも作ろう」という声が上がった。

**??**  $a, b$  の 2 人がこの順にこのくじを引くとき、引く順番によってあたりを引く確率は変わるだろうか。

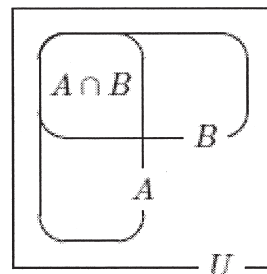
**Q** 上のくじ引きで、次の確率を求めてみよう。

- ①  $a$  が当たりくじを引く確率
- ②  $a$  が当たりくじを引き、 $b$  も当たりくじを引く確率

### ◆◆条件つき確率◆◆

一般に、事象  $A$  が起こったときに事象  $B$  の起こる確率を、 $A$  が起こったときの  $B$  の起こる **条件つき確率** といい、 $P_A(B)$  で表す。

事象  $A$  が起こる場合の数を  $n(A)$  で表すことにすれば、 $A$  が起こったときの  $B$  の起こる条件つき確率は次のようになる。



$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

この(1)の右辺の分子と分母を、それぞれ全事象  $U$  の起こる場合の数  $n(U)$  で割れば

$$\text{分子} = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = P(A \cap B), \quad \text{分母} = \frac{n(A)}{n(U)} = P(A)$$

となる。よって、(1)から、次の式が得られる。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \dots\dots\dots (2)$$

●の②において、 $a$  が当たりを引く事象を  $A$ ,  $b$  が当たりを引く事象を  $B$  で表すと

$$P(A) = \frac{2}{20}, \quad P(A \cap B) = \frac{{}_2P_1}{{}_{20}P_2} = \frac{2 \cdot 1}{20 \cdot 19}$$

であるから、 $P_A(B)$  は、次のようになる。

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2 \cdot 1}{20 \cdot 19}}{\frac{2}{20}}$$

前ページの条件つき確率の(2)から、次の **乗法定理** が得られる。

**確率の乗法定理**

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

**例 1** 前ページのくじを、 $a$ ,  $b$  がこの順に1本ずつ引くとき、当たる確率を考えてみよう。

まず、 $a$  が当たりくじを引く事象を

$A$  とすると、その確率は

$$P(A) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

次に、 $b$  が当たりくじを引く事象を

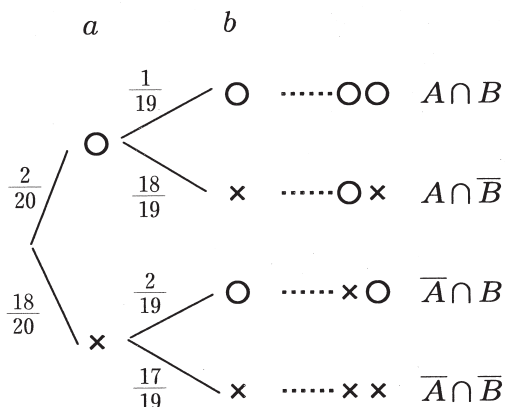
$B$  とすれば、事象  $B$  は、次の2

つの排反事象の和事象で表される。

(i)  $a$  が当たりくじを引き、 $b$

も当たりくじを引く場合

この事象は  $A \cap B$  と表されるから



$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{2}{20 \cdot 19}$$

(ii)  $a$  がはずれくじを引き、 $b$  は当たりくじを引く場合

この事象は  $\bar{A} \cap B$  と表されるから

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = \frac{18}{20} \times \frac{2}{19} = \frac{36}{20 \cdot 19}$$

したがって、 $b$  が当たりくじを引く確率は

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{20 \cdot 19} + \frac{36}{20 \cdot 19} = \frac{1}{10}$$

したがって、 $a$ ,  $b$  の当たる確率は、ともに  $\frac{1}{10}$  である。

**問1** 20 本中 1 本が当たりのくじがある。このくじを  $a, b$  がこの順に 1 本ずつ引くとき、それぞれが当たりを引く確率を求めなさい。ただし、引いたくじは元に戻さないとする。

**問2** 20 本中 2 本が当たりのくじがある。このくじを  $a, b, c$  がこの順に 1 本ずつ引くとき、それぞれが当たりを引く確率を求めなさい。ただし、引いたくじは元に戻さないとする。

日本人男性の 1,000 人に 1 人が感染しているというある病原菌がある。  
この病原菌の検査薬について、病原菌に感染していれば 98% の確率で陽性反応が出るが、感染していない場合でも 1 % の確率で陽性反応が出てしまうという。

**??** 日本人男性の 1 人を選んでこの病原菌の検査をしたところ、陽性反応が出てしまった。この男性が実際に病原菌に感染している確率はどれくらいだろうか。

**Q** どれくらいの確率になるか予想してみよう。

▶▶ この男性が病原菌に感染しているという事象を  $A$ 、検査結果が陽性であるという事象を  $E$  として、検査結果が陽性となる確率を求めてみよう。

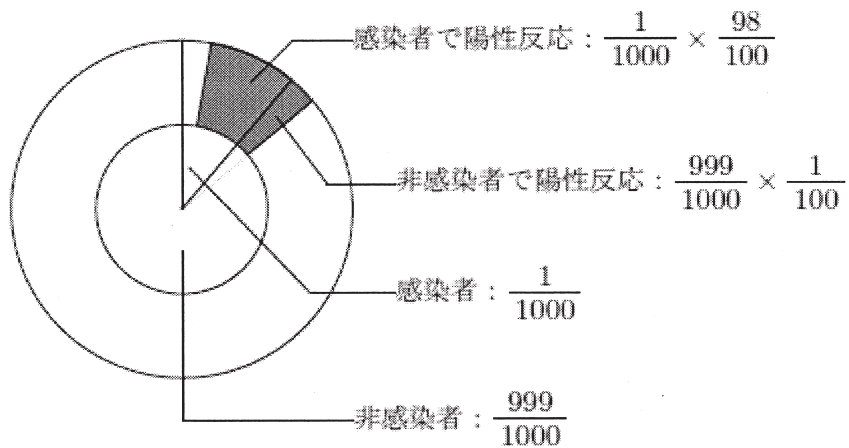
**問3** 男性が感染していて陽性反応が出る場合と、感染はしていないが陽性反応が出てしまう場合がある。このことから、検査結果が陽性となる確率  $P(E)$  を求めなさい。

▶▶ 陽性反応が出てしまったときに、実際に病原菌に感染している確率はどれくらいか求めてみよう。

**問4** 陽性反応が出たときに、実際病原菌に感染している確率  $P_E(A)$  を求めなさい。

**問5** 陰性反応だったにもかかわらず、実際は病原菌に感染している確率を求めなさい。

陽性反応が出たときに実際に病原菌に感染している確率は、下の図をもとに考えることもできる。



感染者の割合は  $\frac{1}{1000}$  であるから

$$\text{感染していて陽性反応も出る確率：} \frac{1}{1000} \times \frac{98}{100}$$

また、感染していない人の割合は  $\frac{999}{1000}$  であるから

$$\text{感染してなくて陽性反応が出てしまう確率：} \frac{999}{1000} \times \frac{1}{100}$$

これらの確率を合わせたものが、陽性反応の出してしまう確率である。したがって、陽性反応が出たときに実際に病原菌に感染している確率は

$$\frac{\frac{1}{1000} \times \frac{98}{100}}{\frac{1}{1000} \times \frac{98}{100} + \frac{999}{1000} \times \frac{1}{100}} \div 0.0893$$

となる。

# 高校 数学 SA



# 目次

---

## 第1単元 平面図形

## 第2単元 いろいろな曲線 ..... 101

### 1 節 式と図形

### 2 節 媒介変数表示と極座標

#### 1 曲線の媒介変数表示 102

## 第3単元 数列 ..... 109

### 1 節 数列

#### 3 等比数列 110

#### 5 帰納的定義 115

## 第4単元 離散数学

のある内容は、この冊子に掲載されていないものを示します。

# 第2単元

---

## いろいろな曲線

## 第2節 媒介変数表示と極座標

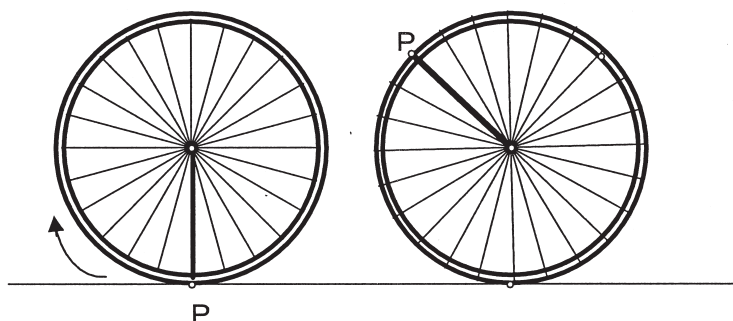
### 1 曲線の媒介変数表示

#### ■サイクロイド

自転車には、自転車の動きが夜、遠くからでもわかるようにリフレクター(反射板)が取り付けられています。

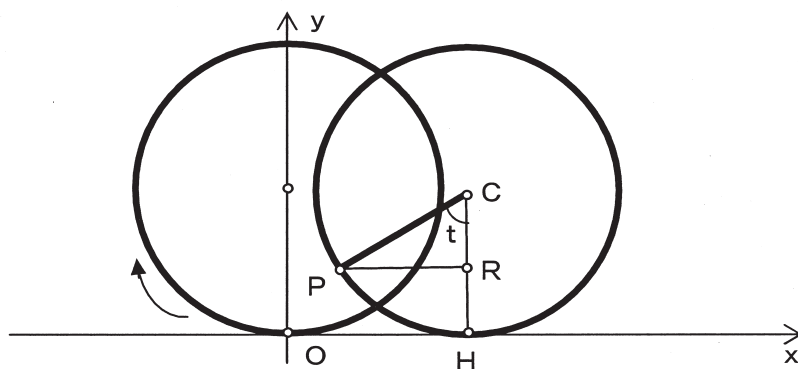
車輪のスポークにリフレクターを取りつけた自転車では、車輪が回転するとき、リフレクターはどんな動き方をするでしょうか。

?? 直線上をすべらないように車輪が転がるとき、車輪の周上の点  $P$  の軌跡はどんな図形になるだろうか。



▶▶ 車輪を平面上の円と考えて、円周上の点の軌跡を考えてみよう。

半径  $a$  の円が  $x$  軸上をすべらずに転がるとき、はじめ原点にあった点が  $\angle HCP$  だけ回転して  $P$  まできたとする。 $\angle HCP$  の大きさを  $t$  ラジアン、点  $P$  の座標を  $(x, y)$  とする。このとき、点  $P$  の座標を  $a$  と  $t$  を用いて表してみよう。



**問 1** 下の  に、あてはまる式を書き入れなさい。

弧 PH の長さは OH に等しいから

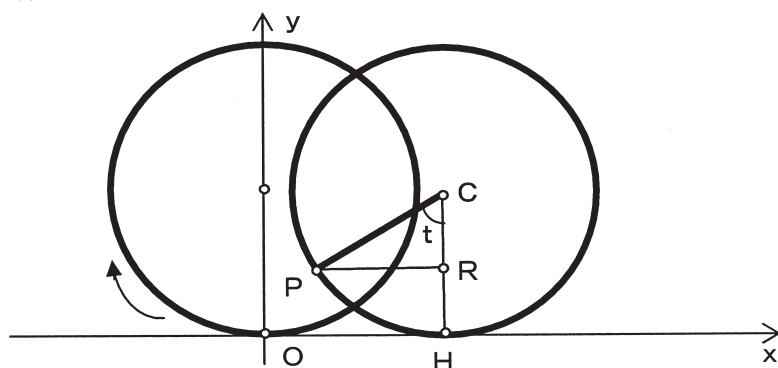
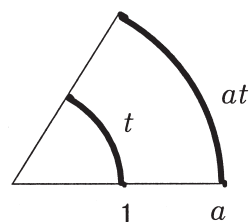
$$OH = \text{  }$$

$PR = a \sin t$ ,  $RC = a \cos t$  であるから

$$x = OH - PR = \text{  }$$

$$y = CH - CR = a - a \cos t$$

となる。



したがって、この円周上の点 P の座標は変数  $t$  によって

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

で表される。この曲線は**サイクロイド**とよばれている。

一般に、平面上の曲線がある変数  $t$  によって

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

で表されるとき、これをその曲線の**媒介変数表示**といい、 $t$  を**媒介変数**という。

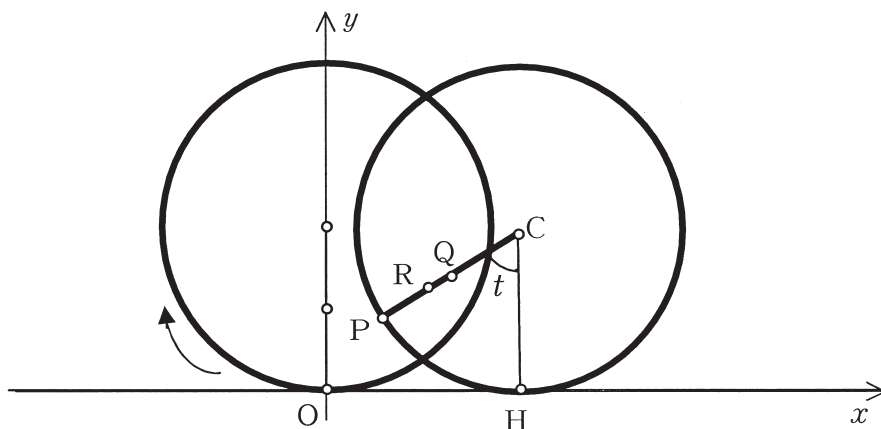
**問 2** グラフ電卓またはコンピュータを利用して、次のサイクロイドをかきなさい。

① 
$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

② 
$$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$$

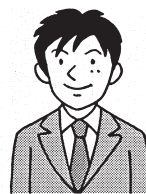
**問3** 半径  $a$  の円が  $x$  軸上をすべらずに転がるとき、はじめ原点にあった点が  $\angle HCP$  だけ回転して  $P$  まできたとする。 $\angle HCP$  の大きさを  $t$  ラジアンとして、次の問に答えなさい。

- ① 円の中心と円周上の点を結ぶ線分の midpoint  $Q$  が描く曲線の媒介変数表示を求めなさい。
- ② 円の中心と円周上の点を結ぶ線分を  $2:1$  に内分する点  $R$  が描く曲線の媒介変数表示を求めなさい。



問3の点  $Q$ , 点  $R$  が描く曲線は**トロコイド**とよばれる。

自転車のスポークに取りつけられたリフレクターの軌跡はトロコイドだね。



**問4** 問3の点  $Q$ , 点  $R$  が描くトロコイドを、円の半径を3として、グラフ電卓またはコンピュータを使ってかきなさい。

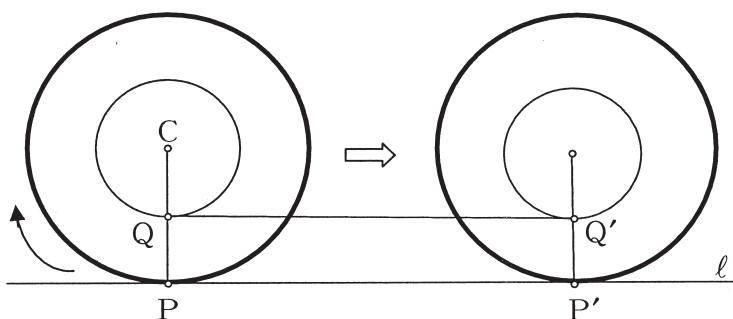
**問5**

Aさんは定円を一直線上で回転させたときの円周の長さについて、次のように考えました。

半径の異なる2つの円の円周の長さが等しい？

**<Aさんの考え>**

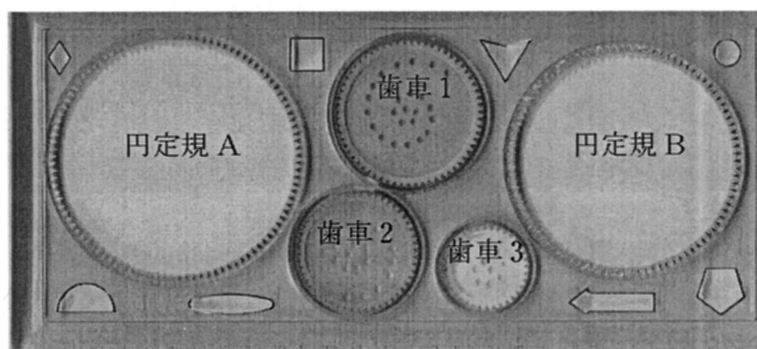
円Cが直線 $l$ 上をすべらずに1回転するとき、円周上の点Pは点P'に、CPの中点Qは点Q'にうつり、PP'の長さはCPを半径とする円の円周の長さに等しい。このとき、点Cを中心としCQを半径とする円も1回転するので、QQ'の長さはCQを半径とする円の円周の長さに等しい。下の図のように $PP' = QQ'$ なので、CPを半径とする円の円周の長さとCQを半径とする円の円周の長さは等しくなる。



Aさんは、異なる2つの円の円周の長さが等しくなると主張しています。Aさんの考えは、どこが間違っているのでしょうか。あなたの考えを説明しなさい。

## ■デザイン定規

デザイン定規と呼ばれる定規を使って曲線を描いたことがありますか。このデザイン定規では、まずセットしてある大・中・小の3つの歯車を取り出し、定規を手でしっかり固定します。次に、歯車の穴に鉛筆を差し込んで、定規のギアに合わせて歯車を円を描くように回すといろいろな曲線が描けます。



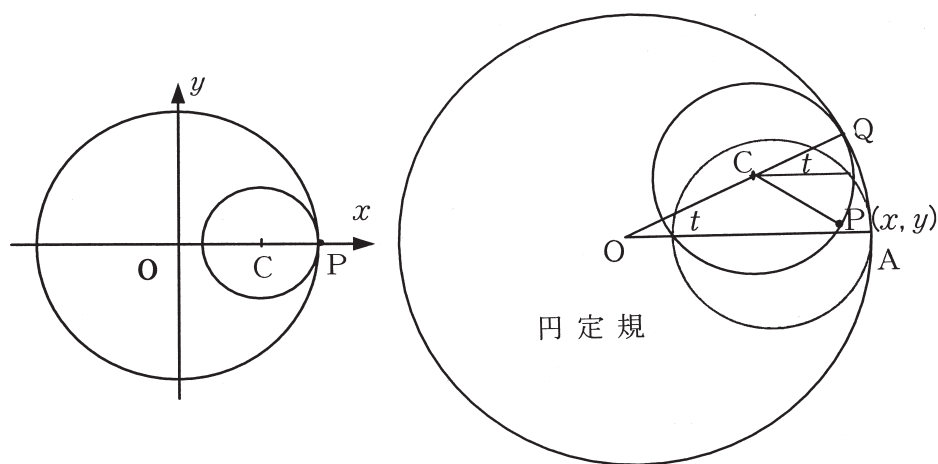
**??** デザイン定規でかいた曲線を、グラフ電卓に表示させてみよう。

**Q** いちばん小さい歯車3と円定規Bを使って実際に曲線をかいてみよう。鉛筆を差し込む穴の位置を変えて描き、歯車3と円定規Bを使ってできる図形の特色をあげてみよう。

▶▶ 歯車と円定規の組み合わせを変えると、どんな図形がかけられるか試してみよう。

**問6** 歯車1, 2, 3のギアの数, 円定規A, Bのギアの数を調べ、歯車と円定規の組合せと曲線の花びらの数との関係を表にまとめなさい。

▶▶ 原点を中心とする半径8の円Oに半径3の円Cが下の図のように内接しながらすべることなく転がる。このとき、円Cの円周上の点で、初めx軸上にあった点Pが描く曲線の媒介変数を求めてみよう。



円Cが回転して、OCとx軸の正の方向とのなす角が $\angle t$ 、 $\angle PCQ = \theta$ とすると、弧PQと弧AQの長さは等しいから

$$3\theta = 8t$$

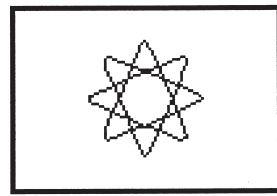
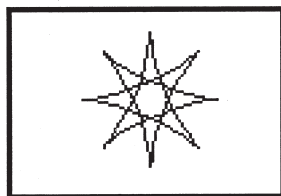
点Pは右上の図で、x軸の正の方向から $\theta - t = \frac{8}{3}t - t = \frac{5}{3}t$ だけ負の方向に回転している。

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$  で、 $\overrightarrow{OC} = (5\cos t, 5\sin t)$ 、 $\overrightarrow{CP} = \left(3\cos \frac{5t}{3}, -3\sin \frac{5t}{3}\right)$  であるから

$$\overrightarrow{OP} = \left(5\cos t + 3\cos \frac{5t}{3}, 5\sin t - 3\sin \frac{5t}{3}\right)$$

したがって、点Pの媒介変数表示は 
$$\begin{cases} x = 5\cos t + 3\cos \frac{5}{3}t \\ y = 5\sin t - 3\sin \frac{5}{3}t \end{cases}$$
 と表される。

**問7** 次の図を、グラフ電卓に表示しなさい。



☞☞ 歯車と円定規の組み合わせを変えた場合の図を、グラフ電卓を用いてかいてみよう。





# 第3单元

---

## 数列

## 第1節 数列

---

### 3 等比数列

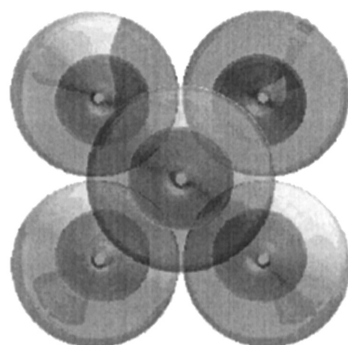
結婚式では、積み重ねたシャンパングラスの最上部からシャンパンを注いでいく「シャンパンタワー」をよく目にする。積み重ねられたシャンパングラス1個の容量は100mlである。このとき、6段目までのグラスをすべて満たすためには、シャンパンはどのくらい必要かを考えてみよう。

▶▶あふれたシャンパンは、どのようになると考えるか、仮定を設定しよう。

右の図はシャンパンタワーの一部を上から見たものである。この図から、あふれたシャンパンはどうなると仮定するか考えよう。

ここでは

グラスからあふれたシャンパンは、漏れることなくそのグラスの下にある4つのグラスに均等に行き渡ることが仮定として考えよう。

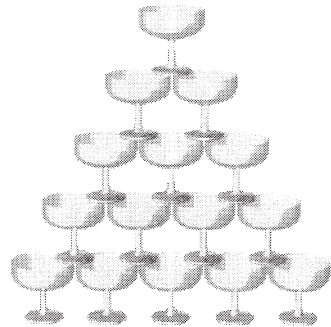


**??** 上の仮定のもとで、6段目までのグラスをすべて満たすのに必要なシャンパンの量はどれくらいだろうか。

これを考える前に、まず、次のようにグラスを重ねた場合について考えてみよう。

## ◆◆等比数列◆◆

右の図のようにシャンパングラスを重ねて、上からシャンパンを注ぐことを考える。グラスからあふれたシャンパンは、そのグラスの下にある 2 つのグラスに均等にいきわたることとする。1 つのシャンパングラスの容量は  $100\text{ml}$  である。



**問 1** 上から 1 段目のグラスを満たすまでに注ぐシャンパンの量を  $a_1$ 、1 段目のグラスが満たされているとき 2 段目のグラスをすべて満たすまでに注ぐシャンパンの量を  $a_2$ 、2 段目のグラスが満たされているとき 3 段目のグラスをすべて満たすまでに注ぐシャンパンの量を  $a_3$ 、というように、数列  $a_n$  を定める。すなわち、 $n-1$  段目のグラスが満たされているとき  $n$  段目のグラスをすべて満たすまでに注ぐシャンパンの量が  $a_n$  である。このとき、 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  を求めなさい。

数列の 1, 2, 4, 8, 16, …ように、1 つ前の数に一定の数を次々にかけて得られる数列を **等比数列** といい、かけていく一定の数をその等比数列の **公比** という。

**例 1** 数列 1, 2, 4, 8, 16, …は、初項が 1、公比が 2 の等比数列である。

**問 2** 問 1 の数列において、初項と公比を求めなさい。

数列  $\{a_n\}$  が初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列であるとき

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 \times r = ar^1$$

$$a_3 = a_2 \times r = ar^2$$

$$a_4 = a_3 \times r = ar^3$$

.....

となっているので、第  $n$  項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

で表される。ただし  $r \neq 0$  のとき  $r^0 = 1$  と定める。

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$  は

$$a_n = ar^{n-1}$$

**問3** 問1の数列において、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

### ◆◆等比数列の和◆◆

?? これまでの考察をもとに、6段目までのグラスをすべて満たすのに必要なシャンパンの量がどのくらいか、考えてみよう。

初項1、公比3の等比数列の初項から第5項までの和を  $S$  とする。この  $S$  の両辺に3を掛けたものを  $S$  から引くと

$$\begin{array}{r} S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 \\ -) \quad 3S = \quad 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 \\ \hline (1-3)S = 1 \qquad \qquad \qquad -3^5 \end{array}$$

したがって 
$$S = \frac{1-3^5}{1-3} = 121$$

一般の等比数列の初項から第  $n$  項までの和も、同様な方法で求められる。

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列の初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。この  $S_n$  の両辺に公比  $r$  をかけたものを  $S_n$  から引くと

$$\begin{array}{r} S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -) \quad rS_n = \quad ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = a \qquad \qquad \qquad -ar^n \end{array}$$

すなわち

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

である。したがって、 $r \neq 1$  のとき、両辺を  $1-r$  で割って

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

となる。また、 $r=1$  のときは、次のようになる。

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = na$$

## 等比数列の和

初項  $a$ 、公比  $r$  の等比数列  $\{a_n\}$  の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$r \neq 1 \text{ のとき} \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$r = 1 \text{ のとき} \quad S_n = a + a + a + \cdots + a = na$$

**問 4** 上から 6 段目までのグラスをすべて満たすのに必要なシャンパンの量を求めなさい。

**問 5** 一般に、上から  $n$  段目までのグラスをすべて満たすのに必要なシャンパンの量を求め、段数による変化について、グラフ電卓を用いて考察しなさい。

## ◆◆自然数の和◆◆

**??** 上から 6 段目までのグラスをすべて満たすまでシャンパンを注いだとき、6 段目までのグラスに入りきらずに、あふれて 7 段目に入ったシャンパンの量はどのくらいだろうか。

1 から  $n$  までの自然数の和

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

を求めてみよう。

等式  $k^2 - (k-1)^2 = 2k - 1$  において

$k=1$	とすれば	$1^2 - 0^2 =$	$2 \cdot 1$	$- 1$
$k=2$	とすれば	$2^2 - 1^2 =$	$2 \cdot 2$	$- 1$
$k=3$	とすれば	$3^2 - 2^2 =$	$2 \cdot 3$	$- 1$
.....				
$k=n$	とすれば	$n^2 - (n-1)^2 =$	$2 \cdot n$	$- 1$

これら  $n$  個の等式の辺々を加えると

$$n^2 - 0^2 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n$$

$$\text{したがって} \quad n^2 = 2S_n - n$$

$$\text{これより} \quad 2S_n = n^2 + n = n(n+1)$$

$$\text{であるから} \quad S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

**問 6** 上から 6 段目までのグラスをすべて満たすまでシャンパンを注いだとき、6 段目までのグラスに入りきらずに、あふれて 7 段目に入ったシャンパンの量を求めなさい。

**問 7** 一般に、上から  $n$  段目までのグラスをすべて満たすまでシャンパンを注いだとき、 $n$  段目までのグラスに入りきらずに、あふれて  $n+1$  段目に入ったシャンパンの量を求め、段数による変化を、グラフ電卓を用いて考察しなさい。

**練習 1** 右の図のようにシャンパングラスを重ねて、上からシャンパンを注ぐ。このとき、グラスからあふれたシャンパンは、そのグラスの下にある 4 つのグラスに均等に行き渡ることとする。グラスの容量を 100ml として、次の間に答えなさい。



- ① 上から 6 段目までのグラスをすべて満たすのに必要なシャンパンの量を求めなさい。
- ② 一般に、上から  $n$  段目までのグラスをすべて満たすまでシャンパンを注いだとき、グラスに入りきれずにあふれてしまったシャンパンの量を求め、段数による変化を、グラフ電卓を用いて考察しなさい。

**練習 2** 等式  $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$  を用いて、自然数の平方の和

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

を求めなさい。

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

**練習 3** 練習 1 で、上から 6 段目までのグラスをすべて満たすまでシャンパンを注いだとき、グラスに入りきれずにあふれてしまったシャンパンの量を求めなさい。

## 5 帰納的定義

### ● 年利

1 年間につく利息の割合を **年利** という。例えば、年利 2% とは、1 年間預けると  $\frac{2}{100}$  の割合で利息がつくことである。

一般に、一定期間につく利息の割合を **利率** という。

#### 例題 1 年利

10,000 円を年利 0.2% で 1 年間預けると、利息はいくらか。

<解>

0.2% は 0.002 であるから

$$10,000 \times 0.002 = 20$$

したがって、1 年間では 20 円の利息がつく。

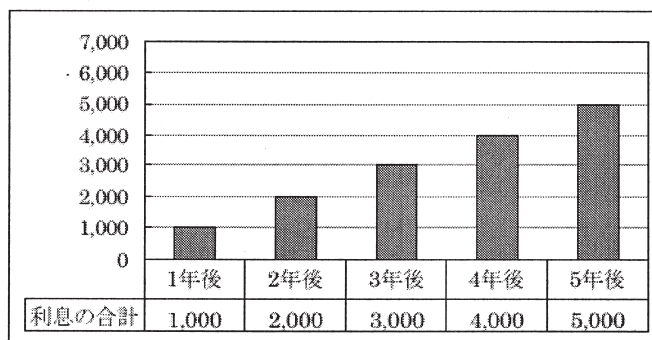
### ● 単利法

年利が 10% の定期預金に 10,000 円を 1 年間預けた。このとき、利息分として 1,000 円を受け取ることができる。この 10,000 円をさらに 1 年間預けると、利息が 1,000 円つくので、2 年間では利息は 2,000 円となる。

最初に預けた金額を **元金** といい、元金と利息の合計を **元利合計** という。

このような利息の計算法を **単利法** という。つまり単利法とは、元金だけを対象として利息を計算する方法である。

年利 10% で、元金 10,000 円を単利法で預けたときの利息の合計額は右のようになる。





## 例題2 単利法

10,000 円を年利 0.2% で  $n$  年間預けることを考える。 $n$  年後の元利合計額を  $a_n$  円とし、単利法で計算するとき、次の問に答えなさい。

- ①  $a_1, a_2, a_3, a_4$  をそれぞれ求めなさい。
- ②  $a_1$  と  $a_2$  の関係式,  $a_2$  と  $a_3$  の関係式,  $a_3$  と  $a_4$  の関係式をそれぞれ求めなさい。
- ③  $a_n$  と  $a_{n+1}$  の関係式を求めなさい。

<解>

- ① 0.2% は 0.002 であるから、1 年間で  $10,000 \times 0.002 = 20$  (円) の利息がつく。

単利法では、この 20 円が毎年利息として加算されていくので、元利合計額は

$$a_1 = 10,000 + 20 = 10,020 \text{ (円)}$$

$$a_2 = 10,020 + 20 = 10,040 \text{ (円)}$$

$$a_3 = 10,040 + 20 = 10,060 \text{ (円)}$$

$$a_4 = 10,060 + 20 = 10,080 \text{ (円)}$$

となる。

- ② ①より、それぞれの関係式は

$$a_2 = a_1 + 20$$

$$a_3 = a_2 + 20$$

$$a_4 = a_3 + 20$$

となる。

- ③  $n$  年後から  $n+1$  年後の 1 年間には 20 円の利息が加算されるので

$$a_{n+1} = a_n + 20$$

が成り立つ。

**問1**  $n$  年後の元利合計額を  $a_n$  とする。単利法で利息を計算するとき、①、②の場合について、 $a_n$  と  $a_{n+1}$  の間に成り立つ関係式をそれぞれ求めなさい。

- ① 元金 20,000 円を年利 0.15% で預けるとき
- ② 元金 100 万円を年利 0.03% で預けるとき

## ◆◆漸化式◆◆

例題2の③の解答の  $a_{n+1}=a_n+20$  は、この数列の一般的な項の関係式を表している。この関係式を **漸化式** という。この漸化式によって、 $a_1$  の値が定まっていれば、数列  $\{a_n\}$  はただ1通りに定まる。すなわち、数列  $\{a_n\}$  は、次の(1), (2)によって、ただ1通りに定まる。

(1)  $a_1$  の値が定まっている。

(2) 漸化式が与えられている。

数列のこのような定め方を **帰納的定義** という。

### 例題3 数列の一般項

例題2において、 $a_1=10,020$ 、 $a_{n+1}=a_n+20$  で定義される数列の一般項を求めよ。

<解>

$a_{n+1}=a_n+20$ 、すなわち  $a_{n+1}-a_n=20$  において、 $n$  に、1, 2, 3, ...,  $n-1$  を順に代入して

$$a_2 - a_1 = 20$$

$$a_3 - a_2 = 20$$

$$a_4 - a_3 = 20$$

.....

$$a_n - a_{n-1} = 20$$

これら  $n-1$  個の等式を辺々加えると、 $a_n - a_1 = 20(n-1)$  となる。ここで

$a_1 = 10,020$  であるから

$$a_n = a_1 + 20(n-1) = 10,000 + 20n$$

となる。

**問2** 問1において、 $n$ 年後の元利合計額  $a_n$  の一般項をそれぞれ求めよ。

### ●複利法

年利 10% で 10,000 円を預金すると、1年後には利息が 1,000 円つく。元金とこの利息分を合わせた 11,000 円を預金すると、さらに1年後には

$$11,000 \times 0.1 = 1,100 \text{ (円)}$$

が利息となり、元利合計額は

$$11,000 + 1,100 = 12,100 \text{ (円)}$$

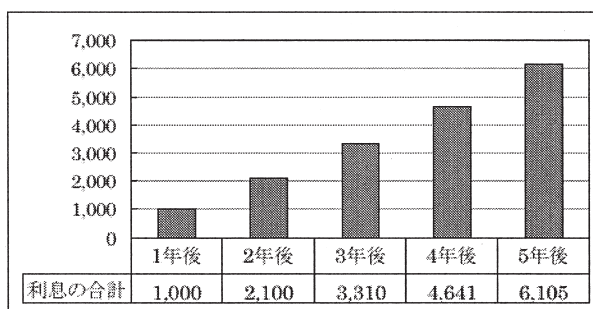
となる。これをまた預金すると、さらに1年後には

$$12,100 \times 0.1 = 1,210 \quad (\text{円})$$

の利息がつき、元利合計額は  $12,100 + 1,210 = 13,310$  (円) となる。

元金は10,000円であるから、利息の合計額は右ようになる。

このような利息の計算法を **複利法** という。つまり複利法とは、利息を元金に加え、その元利合計額を新たな元金と見なして計算する方法である。



#### 例題 4 複利法

10,000円を年利0.2%で $n$ 年間預けることを考える。 $n$ 年後の元利合計額を $a_n$ 円とし、複利法で計算するとき、次の問に答えなさい。

- ①  $a_1$ を求めなさい。
- ②  $a_1$ と $a_2$ の関係式、 $a_2$ と $a_3$ の関係式、 $a_3$ と $a_4$ の関係式をそれぞれ求めなさい。
- ③  $a_n$ と $a_{n+1}$ の関係式を求めなさい。
- ④ 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。

<解>

- ① 0.2%は0.002であるから、1年間で、 $10,000 \times 0.002 = 20$ (円)の利息がつく。したがって、1年後の元利合計額  $a_1$  は、10,020円である。

- ② 2年後には、利息として  $a_1 \times 0.002$  (円) がつく。したがって、2年後の元利合計額  $a_2$  は、 $a_1$ に利息分を加えて

$$a_2 = a_1 + 0.002a_1 = 1.002a_1$$

となる。同様に3年後の利息は  $a_2 \times 0.002$  (円) であるから、元利合計額は

$$a_3 = a_2 + 0.002a_2 = 1.002a_2$$

となる。 $a_4$ も同様で

$$a_4 = a_3 + 0.002a_3 = 1.002a_3$$

となる。

- ③  $n+1$  年後の元利合計額  $a_{n+1}$  は、前年の元利合計額  $a_n$  と1年間の利息分  $0.002a_n$  の合計である。したがって

$$a_{n+1} = a_n + 0.002a_n = 1.002a_n$$

という関係式を得る。

- ④ ③で求めた漸化式  $a_{n+1}=1.002a_n$  において、 $n$  に  $1, 2, 3, \dots, n-1$  を順に代入して

$$a_2=1.002a_1$$

$$a_3=1.002a_2$$

$$a_4=1.002a_3$$

.....

$$a_n=1.002a_{n-1}$$

これら  $n-1$  個の等式を辺々掛けると

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n = 1.002^{n-1} \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{n-1}$$

となる。この両辺を  $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_{n-1}$  で割って

$$a_n = 1.002^{n-1} \cdot a_1$$

となる。①より  $a_1 = 10,020$  であるから

$$a_n = 10,020 \times 1.002^{n-1}$$

である。

**問3**  $n$  年後の元利合計額を  $a_n$  とする。このとき、次の場合において複利法で利息を計算するとき、 $a_1$  の値、 $a_n$  と  $a_{n+1}$  の関係式を求め、数列  $a_n$  の一般項を求めなさい。

- ① 元金 20,000 円を年利 0.15% で預けるとき
- ② 元金 100 万円を年利 0.03% で預けるとき

### ●ローンの返済（リボルビング払い）

10 万円のローンを組んだとき、返済額は 10 万円にはならない。10 万円に利息分を加えた金額が返済額となる。例えば年利 12% で借入金 100,000 円を 1 年後に返済するときは、1 年間の利息分  $100,000 \times 0.12 = 12,000$  (円) を加えた 112,000 円が返済額となる。

カードショッピングではリボルビング払いという返済方法がある。これはあらかじめ月々の支払金額を決めておき、その額を返済が完了するまで支払っていく方法である。このときの年利を手数料率といい、月々の利率は手数料率を 12 で割った値となる。この月々の利率を月利という。

リボルビング払いをするとき、月々の手数料(月利)を毎月の支払額に含める場合(これをウイズイン方式という)と、月々の返済額とは別に月利を加えて支払う場合(これをウイズアウト方式)とがある。ここではウイズイン方式でのリボルビング払いについて考えよう。

- 例 1** 3 万円の商品を月々1 万円のリボルビング払いで支払う場合を考えてみよう。  
 手数料率は 12%とする。このとき、月利は 1%となる。1 回目では、  
 $30,000 \times 0.01 = 300$  (円) の利息がつき、月々の返済額として 10,000 円返済するから、  
 1 回目返済後の残金は

$$30,000 \times (1 + 0.01) - 10,000 = 20,300 \quad (\text{円})$$

となる。

2 回目では、1 回目の残金 20,300 円  
 に 1%の利息がつき、月々の返済額  
 10,000 円を返済するから、2 回目返  
 済後の残金は

$$\begin{aligned} & 20,300 \times (1 + 0.01) - 10,000 \\ & = 10,503 \quad (\text{円}) \end{aligned}$$

となる。

右の表が、このときの返済過程である。

回	利息	月々の支払額	残高
0			30,000
1	300	10,000	20,300
2	203	10,000	10,503
3	105	10,000	608
4	6	614	0

### 例題 5 ローンの返済 (リボルビング払い)

月々の支払額を 10,000 円に設定したリボルビング払いで、500,000 円の商品を購入した。1 年間の手数料率が 13.2%であるとき、次の問に答えなさい。

- ①  $n$  回目の残高を  $a_n$  とし、 $a_n$  と  $a_{n+1}$  との関係式を求めなさい。
- ② 初期値として  $a_0 = 500,000$  とするとき、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。
- ③ グラフ電卓を用いて、総支払い回数を求めなさい。

<解>

- ① 年間の手数料率が 13.2%であるから月利は 1.1% となる。

$n$  回目の残高が  $a_n$  円であるから、利息分は  $a_n \times 0.011$  (円) で、これと  $n$  回目の残高  $a_n$  円との和、すなわち  $a_n + a_n \times 0.011 = 1.011a_n$  (円) から、月々の返済額 10,000 円を引いた値が  $n+1$  回目の残高となる。したがって漸化式は

$$a_{n+1} = 1.011a_n - 10,000$$

となる。

- ② 一般に,  $a_0 = a$ ,  $a_{n+1} = pa_n + q$  を満たす漸化式について考えてみよう。

$$a_1 = pa_0 + q = pa + q$$

$$a_2 = pa_1 + q = p^2a + q(p+1)$$

$$a_3 = pa_2 + q = p^3a + q(p^2 + p + 1)$$

$$a_4 = pa_3 + q = p^4a + q(p^3 + p^2 + p + 1)$$

$$a_5 = pa_4 + q = p^5a + q(p^4 + p^3 + p^2 + p + 1)$$

.....

$$a_n = p^na + q(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p^2 + p + 1)$$

となる。ここで,  $1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n-1}$  は, 初項 1, 公比  $p$ , 項数  $n$  の等比数列の和であるから

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^{n-2} + p^{n-1} = \frac{p^n - 1}{p - 1} = \frac{1 - p^n}{1 - p}$$

である。したがって, 次の式が得られる。

$$a_n = p^na + q \cdot \frac{p^n - 1}{p - 1} = p^na + q \cdot \frac{1 - p^n}{1 - p}$$

- ①より,  $a_0 = a = 500,000$ ,  $p = 1.011$ ,  $q = -10,000$  であるから

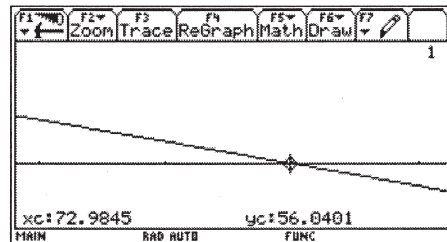
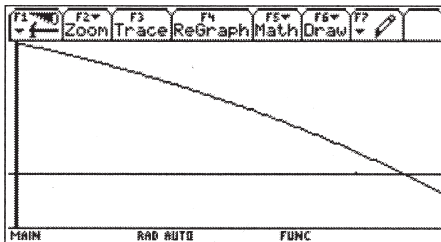
$$\begin{aligned} a_n &= (1.011)^n \times 500,000 - 10,000 \times \frac{(1.011)^n - 1}{1.011 - 1} \\ &= 500,000 \times (1.011)^n - 10,000 \times \frac{(1.011)^n - 1}{0.011} \end{aligned}$$

となる。

- ③ ②より

$$a_n = 500,000 \times (1.011)^n - 10,000 \times \frac{(1.011)^n - 1}{0.011}$$

のグラフをかいてみる。



グラフから, 横軸の切片をトレースすることにより, 支払額が初めて負の値になるのが  $n = 73$  であることが分かる。したがって支払いが完了する回数は 73 回である。

**問 4** 例題 5 において、次の価格の商品を購入したときの支払い回数はそれぞれ何回になるか答えなさい。

- ① 90 万円の商品を購入した場合
- ② 100 万円の商品を購入した場合

**問 5** 問 4 の②のように、いつまでも支払いが完了しない場合がある。これについて次の問に答えなさい。

- ① 月利 1.1%，月々の支払額が 10,000 円るとき，支払いが有限回で完了するための，購入する商品の価格の条件を答えなさい。
- ② 月利 1%で 100 万円の商品を購入するとき，支払いが有限回で完了するための，月々の支払額の条件を答えなさい。
- ③ 月利  $r$  %，月々の支払額が  $a$  円，商品の価格が  $A$  円るとき，支払いが有限回で完了するための条件を答えなさい。

**問 6** 例題 5 の②を参考に

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = pa_n + q \end{cases}$$

で定義される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。

### ●ダイオキシン類の摂取量

ダイオキシン類は，ものの焼却の過程などで自然に生成される非常に有害な物質である。

ダイオキシン類とは，ポリ塩化ジベンゾーパラージオキシン(PCDD)，ポリ塩化ジベンゾフラン(PCDF)，およびコプラナーポリ塩化ビフェニル(コプラナーPCB)をまとめた総称である。分子の結合の違いにより，PCDD は 75 種類，PCDF は 135 種類，コプラナーPCB は十数種類の仲間がある（これらのうち毒性があるとみなされているのは 29 種類である）。

ダイオキシン類は，毒性の強さがそれぞれ異なっており，PCDD のうち「2,3,7,8-TCDD」という化合物が最も毒性が強いことが知られている。この「2,3,7,8-TCDD」の毒性を 1 として他のダイオキシン類の毒性の強さを換算したものを TEF（毒性等価係数）という。

この毒性等価係数を用いてダイオキシン類の毒性をたし合わせた値を TEQ（毒性等量）といい，この値がダイオキシン類の摂取量などを考えるときにはよく用いられる。ダイオキシン類は非常に微量でも人体に影響を及ぼす。



▼微量物質の重さを測る単位▼

kg (キログラム)	$= 10^3 \text{ g}$	(1000 グラム)
g (グラム)		
mg (ミリグラム)	$= 10^{-3} \text{ g}$	(1000 分の 1 グラム)
$\mu\text{g}$ (マイクログラム)	$= 10^{-6} \text{ g}$	(100 万分の 1 グラム)
ng (ナノグラム)	$= 10^{-9} \text{ g}$	(10 億分の 1 グラム)
pg (ピコグラム) ※	$= 10^{-12} \text{ g}$	(1 兆分の 1 グラム)

日本では、ダイオキシン類の 1 日の摂取量は、体重 1 kg につき 1.68 pg-TEQ であると報告されている。年に換算すると、約 613.2 pg-TEQ を体重 1kg につき摂取していることとなる。

摂取されたダイオキシン類は体内ではそのほとんどが吸収され、体内に吸収されたダイオキシン類の量が半分になるまで約 7.5 年がかかる（これを半減期という）。

人が生まれてから毎年この量のダイオキシンを摂取しているとして、70 年後には体重 1 kg につきどのくらいの量が体内に蓄積されるだろうか。

**練習 1** ダイオキシン類の蓄積量について、次の問に答えなさい。

- ① 体内のダイオキシン類が 1 年間で減少する割合を  $r$  とする。 $r$  をグラフ電卓を用いて求めなさい。
- ② 人が生まれてから  $n$  年後に体内に蓄積されている体重 1 kg あたりのダイオキシン類の量を  $a_n$  とする。年間の摂取量 613.2 pg-TEQ を  $k$  とし、これと①の  $r$  を用いて、 $a_{n+1}$  と  $a_n$  の間に成り立つ関係式を求めなさい。
- ③ 生まれたときのダイオキシン類の蓄積量は 0 である、すなわち  $a_0 = 0$  であると仮定して、②の漸化式を解き、70 年後の蓄積量を求めなさい。

㊦ 近年ではダイオキシン対策が徹底され、1 日の摂取量もかなり少なくなったが、昭和 52 年頃の 1 日の摂取量は約 8 pg-TEQ であった。もしこの摂取量が今後も続いていくとすると、生まれてから 70 年後にはどのくらいの量のダイオキシン類が体内に蓄積されることになるだろうか、考えてみよう。

---

※ 東京ドームを水で満たしたときの重さが約  $10^{12} \text{ g}$  である。したがって、その中に角砂糖 1 個 (1 g) を溶かした場合を想定すると、その水 1 g (1 cc) に含まれている砂糖が 1 pg になる。



## ●ローンの返済（元金均等返済）

**例 2** 120,000 円を年利 24%で借り入れ 1 年間 12 か月にわたり返済するときの毎月の返済額を考えてみよう。ただし、元金分を毎月一定額ずつ返済するものとする。月利は 2%で、毎月の元金分の返済額は

$$120,000 \div 12 = 10,000 \quad (\text{円})$$

である。これに元金残高に対する利息を加えて返すことになる。したがって

$$\text{最初の月の利息分は} \quad 120,000 \times 0.02 = 2,400 \quad (\text{円})$$

$$2 \text{ か月目の利息分は} \quad (120,000 - 10,000 \times 1) \times 0.02 = 2,200 \quad (\text{円})$$

$$3 \text{ か月目の利息分は} \quad (120,000 - 10,000 \times 2) \times 0.02 = 2,000 \quad (\text{円})$$

というようになる。

元金分と合わせると、1 か月目の返済額は

$$10,000 + 2,400 = 12,400 \quad (\text{円})$$

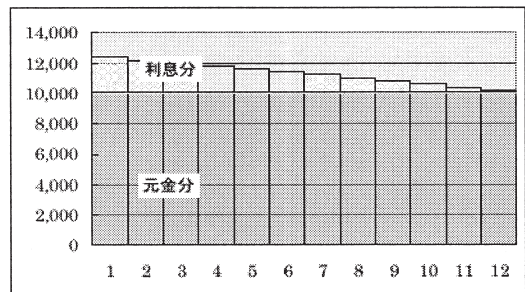
2 か月目の返済額は

$$10,000 + 2,200 = 12,200 \quad (\text{円})$$

3 か月目の返済額は

$$10,000 + 2,000 = 12,000 \quad (\text{円})$$

となる。



グラフからも分かるように、この返済方法では毎月の返済額はだんだん少なくなるが、最初のうちの返済額はかなり大きいという特徴がある。

このような返済方法を **元金均等返済法** という。

**問 7** 例 2 において、最後の返済時(12 か月目)の返済額はいくらになるか。また、返済を完了したとき、支払った利息の総額は何円になるか。

**問 8** 例 2 において、2 年間(24 か月)で返済するときを考える。

- ① 最初の月の返済額を求めなさい。
- ② 返済額は毎月いくらずつ少なくなるか求めなさい。
- ③ 2 年目の最初(13 ヶ月目)の返済額を求めなさい。
- ④ 返済を完了するまでに支払う利息の総額を求めなさい。

**練習 2** 自動車の購入資金として銀行から 180 万円を借り入れた。年利 9%で、これを 5 年間(60 ヶ月)で元金均等返済する。最初の月の返済額と返済が完了するまでの利息の総額を求めなさい。

### ●ローンの返済（元利均等返済）

元金均等返済法では毎月の元金分の返済額は一定であるが、利息分が異なるため結果として毎月の支払額は一定ではない。特に返済開始初期の返済額が高額になる。そこで、元金分と利息分を合わせた支払額が一定になるような返済方法が考えられる。

この返済方法を **元利均等返済法** という。

ローンを組む場合は、通常こちらの方が一般的である。

**例 3** 120,000 円を年利 24% で借り入れ、1 年間 12 か月にわたり返済する。このときの毎回の返済額について考えてみよう。ただし、元金分と利息分を合わせた支払額を毎月一定額ずつ返済するものとする。

いま、元金分と利息分を含めた毎月の支払額を  $x$  円とし、月利を  $p$  とおく。

この場合、 $p = 2\% = 0.02$  である。

最初の月は、利息分は  $120,000p$  円であるから、毎月の返済額  $x$  円のうち元金分に相等するのは  $(x - 120,000p)$  円である。

したがって、1 回目返済後の元金残高は

$$\underbrace{120,000}_{\text{元金}} - \underbrace{(x - 120,000p)}_{\text{1 回目返済時の元金分}} = \underbrace{120,000(1 + p) - x}_{\text{1 回目返済後の元金残高}} \quad (\text{円})$$

である。2 回目の返済時は、この元金残高に対し利息がつくので、その額は

$$\{120,000(1 + p) - x\}p \quad (\text{円})$$

である。したがって、2 回目返済時の元金分は

$$x - \{120,000(1 + p) - x\}p = (1 + p)x - 120,000p(1 + p) \quad (\text{円})$$

であるから、2 回目返済後の元金残高は

$$\begin{aligned} & \underbrace{\{120,000(1 + p) - x\}}_{\text{1 回目返済後の元金残高}} - \underbrace{\{(1 + p)x - 120,000p(1 + p)\}}_{\text{2 回目返済時の元金分}} \\ &= \underbrace{120,000(1 + p)^2 - \{1 + (1 + p)\}x}_{\text{2 回目返済後の元金残高}} \quad (\text{円}) \end{aligned}$$

である。同様に 3 回目返済時の利息分は

$$\{120,000(1 + p)^2 - \{1 + (1 + p)\}x\}p \quad (\text{円})$$

であるから、3 回目返済時の元金分は

$$x - \{120,000(1 + p)^2 - \{1 + (1 + p)\}x\}p = (1 + p)^2x - 120,000p(1 + p)^2 \quad (\text{円})$$

である。したがって、3 回目返済後の元金残高は

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\{120,000(1+p)^2 - (1+(1+p))x\}}_{\text{2回目返済後の元金残高}} - \underbrace{\{(1+p)^2x - 120,000p(1+p)^2\}}_{\text{3回目返済時の元金分}} \\
 &= \underbrace{120,000(1+p)^3 - \{1+(1+p)+(1+p)^2\}x}_{\text{3回目返済後の元金残高}}
 \end{aligned}$$

元利均等返済法の考え方は次のようにまとめられる。

### 元利均等返済法の考え

元利均等返済法において、毎回の支払額を  $x$  とすると

$(k \text{ 回目返済後の元金残高}) = ((k-1) \text{ 回目返済後の元金残高}) - (k \text{ 回目返済時の元金分})$

の関係が成り立ち、さらに

$(k \text{ 回目返済時の元金分}) = x - (k-1 \text{ 回目返済後の元金残高})p$

という関係がある。

**問9** 例3において、4回目返済後の元金残高、5回目返済後の元金残高を求めなさい。

### 等比数列の和

初項  $a$ 、公比  $r$  である等比数列の初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  は

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad (r \neq 1 \text{ のとき})$$

例3において、12回目返済後の元金残高は

$$120,000(1+p)^{12} - \{1 + (1+p) + (1+p)^2 + (1+p)^3 + \cdots + (1+p)^{11}\}x$$

となることが分かる。ここで  $x$  の係数は、初項1、公比  $(1+p)$  の等比数列の初項から第12項までの和であるから

$$120,000(1+p)^{12} - \frac{(1+p)^{12}-1}{(1+p)-1}x = 120,000(1+p)^{12} - \frac{(1+p)^{12}-1}{p}x$$

となるが、返済は12回で完了するので、12回目返済後の元金残高は0円である。

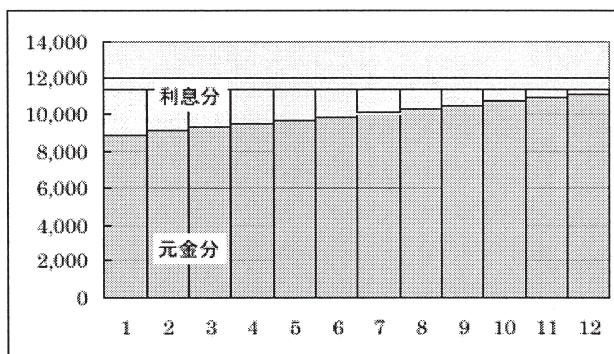
これから

$$x = \frac{120,000p(1+p)^{12}}{(1+p)^{12}-1}$$

となる。

$p=2\%=0.02$  を代入して計算すると、毎月の返済額11,347円であることが分かる。

- 問 10** 例 3 において、12 回の支払いが終了したとき、利息の総額はいくらになるか求めよ。



- 問 11** 銀行から月利  $p$  で  $S$  円を借り入れ、12 回の元利均等返済を行うことを考える。 $k$  回目返済後の元金残高を  $a_k$  円、毎回の返済額を  $x$  円とする。前ページの「元利均等返済法の考え」を参考に、次の問に答えなさい。
- ①  $a_{k-1}$  と  $a_k$  との関係式を求めなさい。
  - ②  $a_0 = S$  として、① の漸化式から、数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めなさい。
  - ③ 12 回で返済が完了するので、12 回目返済後の元金残高は 0 円、すなわち、 $a_{12} = 0$  である。このことから毎回の返済額  $x$  を求めなさい。

問 11 を一般化すると、次のことが分かる。

#### 元利均等返済での毎回の返済額

利率  $p$  で  $S$  円を借り入れ、これを元利均等返済で  $n$  回で返済するとき、毎回の返済額  $c$  は

$$c = \frac{Sp(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$$

- 練習 3** 300 万円の自動車を購入するために、銀行から年利 9 % で、代金の全額 300 万円を借り入れた。これを 5 年間で元利均等返済する。このとき、月々の返済額はいくらか。また、返済が完了するまでに支払う利息の総額はいくらか。
- 練習 4** 300 万円の自動車を購入するために、銀行から年利 9 % で資金を借り、5 年間の元利均等返済を行いたい、自分の月収の状況から、ローンの返済は月々 5 万円でやりたい。頭金としていくら貯めておけばよいか。

## ●繰り上げ返済

長期にわたるローンを組んだとき、貯金などの手持ち資金に余裕ができた段階で、ローンの一部をまとめて返済することができる。これが繰り上げ返済である。繰り上げ返済分は、借り入れ元金の残高に充てられるので、その分残高を減らすことができる。したがって、繰り上げ返済をした場合、それ以降の返済については次の2通りの方法が考えられる。

(I) 返済回数を変えずに、毎回の返済額を変更する。

(II) 毎回の返済額は変えずに、返済回数を変更する。

次の例題で、繰り上げ返済について考えてみよう。

### 例題6 繰り上げ返済(1)

300万円の自動車を購入するために、銀行から年利9%で、代金の全額300万円を借り入れ、5年間の元利均等返済をしている。

① 毎回の返済額を求めなさい。

②  $k$ 回目返済後の元金残高を $a_k$ 円とし、 $a_{k-1}$ と $a_k$ の関係式を求めなさい。さらに、 $a_0 = 300$ 万として一般項 $a_k$ を求めなさい。

そのうち貯金が30万円貯まったので、3年後にあたる36回目の返済時に、30万円を繰り上げ返済した。

③ 繰り上げ返済を行う前の、36回目返済後の元金残高を求めなさい。

④ 繰り上げ返済を行ったとき、37回目返済前の元金残高はいくらか。

<解>

① 毎月の支払額 $c$ は、 $c = \frac{Sp(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}$ で求めることができる。この例題では、

元金 $S = 300$ 万円、月利 $p = 0.75\% = 0.0075$ 、回数 $n = 5 \times 12 = 60$ (か月)  
であるから、毎回の支払額 $c$ は

$$c = \frac{300 \text{万} \times 0.0075 \times (1 + 0.0075)^{60}}{(1 + 0.0075)^{60} - 1} \div 62,275 \text{ (円)}$$

② 問11を参考にして、 $a_k = (1 + 0.0075)a_{k-1} - c$ で、①で求めたことから

$$a_k = 1.0075 \times a_{k-1} - 62,275$$

となる。 $a_0 = 300$ 万を代入してこの漸化式を解くと

$$a_k = 300 \text{万} \times 1.0075^k - 62,275 \times \frac{1.0075^k - 1}{0.0075}$$

③ ②で得られた式に、 $k = 36$ を代入して計算すると

$$a_{36} \div 1,363,148$$

- ④ 36回目返済後の元金分からさらに繰り上げ返済額 30 万円を引いたものが 37 回目返済前の元金分となるので

$$1,363,148 - 300,000 = 1,063,148 \text{ (円)}$$

例題 6 をもとに、繰り上げ返済において

(I) 返済回数は変えずに、毎回の返済額を変更する。

(II) 毎回の返済額は変えずに、返済回数を変更する。

の 2 つの場合を具体的に考えてみよう。

### 例題 7 繰り上げ返済 (2)

例題 6 について、次のことを考えよ。

- ① 総返済回数 60 回(5 年間)は変えずに、毎回の支払額を変えると、37 回目以降の毎回の返済額はいくらになるか。
- ② 毎回の返済額は変えずに、返済回数を短縮するとき、何回で返済が完了するか。

<解>

- ① 37 回目から 60 回目までの 24 回で、37 回目当初の元金残高を返済する、すなわち、元金 1,063,148 円、返済回数 24 回の元利均等返済と考えればよい。例題 6 の①と同様にして計算すると

$$\frac{1,063,148 \times 0.0075 \times (1.0075)^{24}}{(1.0075)^{24} - 1} \div 48,570 \text{ (円)}$$

- ② リボルビング払いの考え方とまったく同じに考えればよい。

元金が 1,063,148 円で毎回の返済額が 62,275 円であるとき、37 回目の返済を 1 回目とし、 $k$  回目返済後の元金残高を  $b_k$  円 とすると

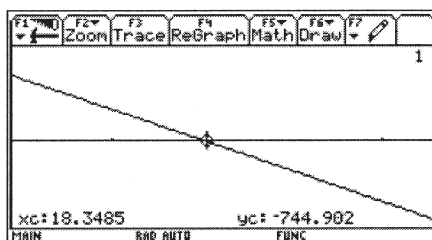
$$b_k = (1 + 0.0075) b_{k-1} - 62,275$$

という漸化式が得られる。これを、 $b_0 = 1,063,148$  として、この漸化式を解くと

$$b_k = 1,063,148 \times 1.0075^k - 62,275 \times \frac{1.0075^k - 1}{0.0075}$$

グラフ電卓を使って、この  $b_k$  がはじめて負になる  $k$  の値を読み取ると、 $k=19$  であることが分かる。したがって、37 回目以降の支払いは 19 回で完済する。よって、返済回数の合計は 55 回となって、繰り上げ返済しない場合に比べて、5 回少なくなる。

$$\begin{aligned} a_n &= pa_{n-1} + q \text{ で} \\ a_0 &= a \text{ のとき} \\ a_n &= ap^n + q \times \frac{p^n - 1}{p - 1} \end{aligned}$$





- 注意 ②において、最後の返済額についてはそれまでの返済額 62,275 円と同額になるとは限らない。支払い 54 回目（繰り上げ返済後 18 回目）返済後の元金残高は、②の  $b_k$  において  $k=18$  を代入した値であるから、 $b_{18} \doteq 20,847(\text{円})$  となる。したがって、利息を含めた最後の返済額は

$$20,847 \times (1 + 0.0075) \doteq 21,003 \text{ (円)}$$

である。

この例題の結果、それぞれの方法によるおよその返済総額は次のようになる。

繰り上げ返済なしの場合： $62,275 \times 60 = 3,736,500$  (円)

繰り上げ返済(I)の場合： $62,275 \times 36 + 48,570 \times 24 + 300,000 = 3,707,580$  (円)

繰り上げ返済(II)の場合： $62,275 \times 54 + 300,000 + 21,003 = 3,683,853$  (円)

上のことから分かるように、繰り上げ返済では(I)の場合よりも(II)の場合の方が総支払額が少なくなる。したがって、通常は(II)の場合を選択する方が一般的である。

では、繰り上げ返済する時期について返済回数はどれくらい変化するかを、次の練習で考えてみよう。

**練習5** 住宅を購入するため、銀行から 2000 万円を借入れ、年利 2.7%の 30 年払いで元利均等返済している。

返済期間中も少しずつお金を貯めて、100 万円の手持ち資金ができた。これを繰り上げ返済に充てようと考えている。繰り上げ返済については返済期間を短縮する方法を選択するつもりである。

このとき、次の問に答えなさい。

- ① 毎月の支払額を求めなさい。
- ② 60 回目(5 年後)返済時に繰り上げ返済する場合、支払いが完了するまでの回数を求めなさい。
- ③ 180 回目(15 年後)返済時に繰り上げ返済する場合、支払いが完了するまでの回数を求めなさい。





編集委員

杉山吉茂

東京学芸大学

吉川行雄

山梨大学

渡邊公夫

早稲田大学

藤井斉亮

東京学芸大学

中村享史

山梨大学

清水美憲

筑波大学

執筆者 **高等学校**

植野美穂

東京学芸大学附属国際中等教育学校

高橋 均

東京大学附属中等教育学校

高橋広明

東京学芸大学附属国際中等教育学校

西村圭一

東京学芸大学附属国際中等教育学校

細矢和博

東京大学附属中等教育学校

**小学校**

石井勝博

埼玉県ふじみ野市立みずほ台小学校

市川 啓

埼玉県ふじみ野市立西原小学校

榎本 崇

埼玉県ふじみ野市駒西小学校

笠井健一

東京都日野市立日野第七小学校

佐々木千穂

東京都千代田区立番町小学校

杉田博之

成城学園初等学校

高橋恵美子

東京都東久留米市第二小学校

高橋丈夫

東京学芸大学附属小金井小学校

田端輝彦

宮城教育大学教育学部

土屋利美

埼玉県狭山市立入間川小学校

長島寛和

東京学芸大学附属小金井小学校

中野博之

弘前大学教育学部

早川 健

山梨県甲府市立新田小学校

山田剛史

東京学芸大学附属竹早小学校

亘理史子

東京都目黒区立原町小学校

**中学校**

新井 仁

長野市立柳町中学校

清水宏幸

山梨大学附属中学校

本田千春

東京学芸大学附属国際中等教育学校

森 聖

埼玉県新座市立第二中学校