はじめに

私達は，平成 10 年の学習指導要領の改訂で算数・数学の内容が 3 割削減されたのを憂い，「我が国の望ましい算数・数学のカリキュラム」の開発を思い立ち，日本教材文化研究財団のご好意とご協力を得て，平成 12 年からカリキュラムの研究・開発に当たり，平成 14 年にその案を発表した。その後，平成 15 年からは，そのカリキュラムを具体化する教科書の執筆活動にもご協力をいただいてきた。さらに，今回，東京書籍のご好意も得て，ここに教科書の形で発表することができるようになった。日本教材文化研究財団と東京書籍に心から感謝するとともに，本教科書の作成にご協力いただいた多くの方々にも心から感謝の意を表する次第である。

本教科書シリーズの特色

本教科書の作成にあたっては，次のことに心掛けた。

1．数学を利用する能力と態度の育成

これからは，これまで以上に数学を利用する機会が増え，数学を用いて事象を数理的にとらえ，そこにある問題を適切に処理できる能力と態度を身につけることが欠かせない社会になる。そうした社会では，すべての子どもが数学を活用して現実世界の様々な事象を表現し，その仕組みを解明し，数学を用いて予想したり問題解決を行ったりすることができるような算数・数学教育をすることが求められる。このようなことはこれまでも言われてきたことではあるが，これまでの算数・数学の指導は，まず数学の理解をはかり，技能を習熟させ，そのあと数学を用いて問題を解決させるという形，つまり，数学の理解→応用という形で行なわれてきたが，そのような応用は数学の理解や習熟の程度を試すためと考えられ，数学が役に立つという意識を育てられないできた。

本教科書では，身の回りの問題を数学を用いて解決することを中心にするとともに，数学の有用性が分かるようにするため，まず，解決したい問題を提示し，その解決に必要な数学を学んで問題を解決することを通して，数学を用いることによって問題が解決できたという気持ちが生まれるようにした。

そうしない単元では，数学を学ぶ必然性が分かるような展開を工夫した。

2．教える数学のレベルの向上

身の回りにある問題を数学を用いて解決できるためには，事象を数学的に表現し処理するために必要な三角関数や指数関数などのいろいろな関数，微分・積分の基礎までを身につけていることが必要であると考え，高校１年までにそれらをすべての生徒が学習できるようにした。

3．テクノロジーの活用

グラフ電卓やパソコンなどのテクノロジーを適切に活用し，計算などの技能の習熟に必要な時間を少なくすると同時に，これまで処理できなかった計算をしたり，手で書けなかったグラフを描かせたりすることなどによって，解決できる問題の幅を拡げるようにした。

4．単元構成

学習の効率等を考え，単元の構成をこれまでと変えたところがある。たとえば，小学校では，これまで小数と分数の学習は別々の単元で学習してきたが，本教科書シリーズでは，小数と分数を関連づけて学ばせるため，小数と分数を同じ単元で学習させるようにした。中学校では，これまで方程式と関数は単元が分けられ，方程式→関数の順序であったが，関数の単元の中に方程式を含めて学習できるようにした。

（編集代表　杉山吉茂）

中学校編の特色

日常事象や自然現象を数理的に把握し数学を積極的に用いて問題を解決する活動や，数学を創造的・発展的に学習できるようにすることを通して，数学のよさ，数学の学習の楽しさが感じられるようにした。

1．日常の具体的な事象を数理的に把握することに重点をおいたが，単元によっては，具体的な事象からでなく，数学的な必然性をもった課題を解決することを通して数学を発展的・創造的に学習できるようにし，数学が発展的に作られることが分かるような展開を工夫した。

2．具体的な事象を数理的に考察する活動を重視するため生のデータを用いることにしたので，グラフ電卓などのテクノロジーを活用することにした。これらを活用することにより，表，グラフを容易に描くこともでき，それらを活用して数量関係に関わる多くの問題に答えることに役立てることもできる。

3．これまで，方程式と関数は単元が分けられ，方程式→関数の順序で学習が進められてきたが，関数の単元の中に方程式・不等式を含め，日常事象や自然現象の中に関数を認め，その関数を利用して問題を解決する際方程式が必要となるという場面を作って方程式の学習をするようにした。

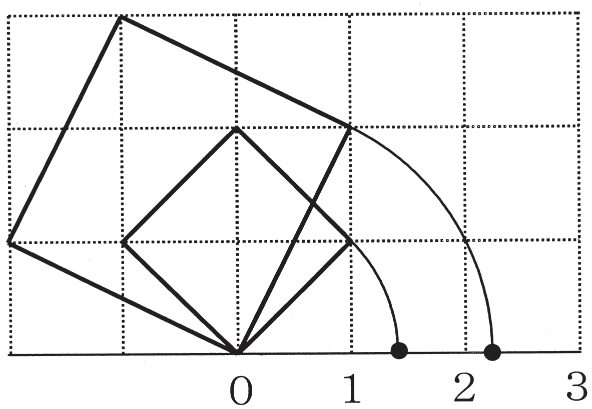
4．高校で三角関数を学習することにしたので，三角比の学習を中学３年に位置づけた。

目次

第1単元	**無理数** …………………………	**1**
	①平方根	2
第2単元	**多項式** …………………………	**15**
	①多項式の計算	16
	②因数分解	27
第3単元	**事象と関数** …………………………	**45**
	①事象と関数	46
	②いろいろな関数	64
第4単元	**三平方の定理** …………………………	**73**
	①三平方の定理	74
	②三平方の定理の応用	83
第5単元	**円** …………………………	**97**
	①円の性質	98
	②円周角	103
	③円と直線	117
	④２つの円	128
第6単元	**三角比** …………………………	**135**
	①三角比	136
	②図形の計量	148
第7単元	**資料の分析** …………………………	**155**
	①資料の分析	156

第1単元

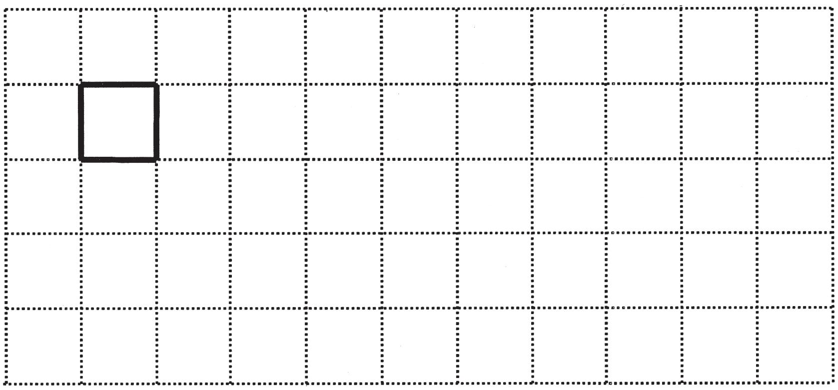
無理数



① 平方根

1 平方根の大きさ

Q 下の方眼紙にかかれた正方形は，面積が 1cm² です。



（1 目もりは 1cm）

① この方眼紙に，面積が 2cm² の正方形をかいてみましょう。

② ①でかいた面積が 2cm² の正方形の 1 辺の長さを，ものさしではかって求めてみましょう。

面積が 2cm² の正方形の 1 辺の長さを x cm とすると

$$x^2=2$$

となります。このときの x の値を求めてみましょう。

1＜2＜4 より，面積が 2 の正方形の 1 辺の長さは，面積が 1 の正方形の 1 辺よりも長く，面積が 4 の正方形の 1 辺よりも短くなります。

したがって，x の値の範囲は　$1<x<2$　となります。

すなわち，x の整数部分は１であることがわかります。

次に，正方形の１辺の長さを　1.1，1.2，1.3，……として，これらの正方形の面積を順に求めてみると

$$1.1^2=1.21,\quad 1.2^2=1.44,\quad 1.3^2=1.69,\quad 1.4^2=\mathbf{1.96},\quad 1.5^2=\mathbf{2.25},\quad \cdots\cdots$$

となることから，x の値の範囲は，$1.4<1.5$　となります。

したがって，x の値は1.4… であることがわかります。

さらに，正方形の１辺の長さを　1.41，1.42，1.43，……として，これらの正方形の面積を順に求めてみると

$$1.41^2=\mathbf{1.9881},\quad 1.42^2=\mathbf{2.0164},\quad 1.43^2=2.0449,\quad \cdots\cdots$$

となることから，x の値の範囲は，$1.41<x<1.42$ であり，その値は 1.41…となることがわかります。

問　1　同じようにして，計算を続け，面積が２の正方形の１辺を求めなさい。

面積が２の正方形の１辺の長さ x は，$x=1.41421356\cdots\cdots$　とかぎりなく続く小数になります。この数は，分数の形で表すことはできません。

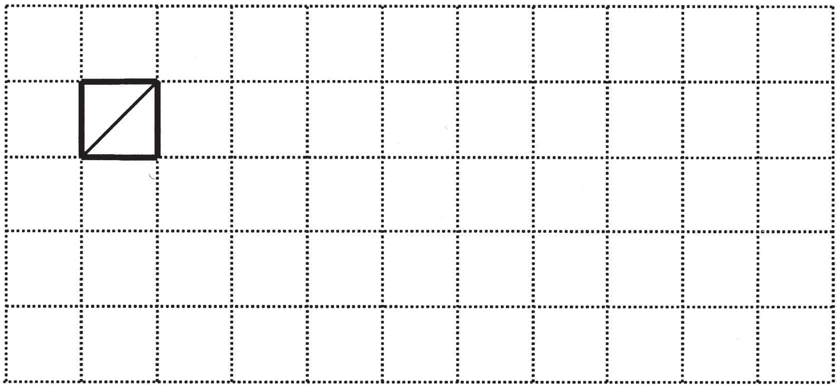
平方(２乗)して２になる数を $\sqrt{2}$ と表し，「**ルート２**」と読みます。

0.33333……は，$\sqrt{2}$ の値と同じようにかぎりなく続く小数ですが，$\frac{1}{3}$ のように，分数の形で表すことができます。また，1.6621621621……も $\frac{123}{74}$ のように，分数の形で表すことができます。

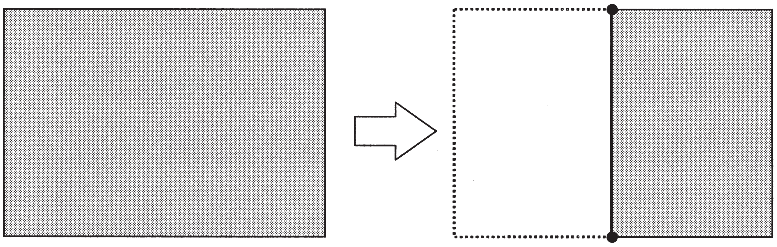
これらの小数は，３や６，２，１という数字が，この順序でかぎりなくくり返されます。このような小数を**循環小数**といいます。循環小数は，分数の形で表すことができます。

問　2　かぎりなく続く小数で，しかも，循環小数でないものを，$\sqrt{2}$ 以外でみつけなさい。

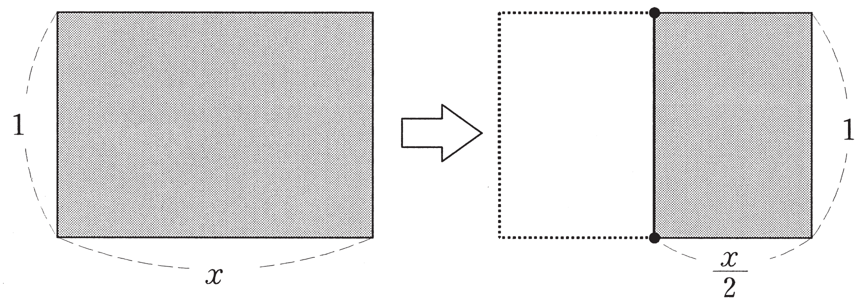
Q 面積が1の正方形の対角線の長さはどれだけでしょうか。



コピー用紙などの長方形の紙を，下の図のように二つ折りにしたとき，できた長方形はもとの長方形と相似になります。このとき，もとの長方形の縦と横の長さの比を求めてみましょう。



もとの長方形の縦を1，横を x とすると



$x:1=1:\frac{x}{2}$　より　$x^2=2$

したがって　　$x=\sqrt{2}$

以上のことからわかるように，$\sqrt{2}$ という値はいろいろなところで見つけることができます。

一般に，ある数 x を2乗すると a になるとき，すなわち，$x^2=a$ であるとき，x を a の**平方根**といいます。

a が正の数であるとき，a の2つの平方根のうち

正のほうを　$\sqrt{a}$，　負のほうを　$-\sqrt{a}$

と書きます。この記号 $\sqrt{}$ を**根号(ルート)**といいます。

問 3　次の数の平方根をいいなさい。

① 16　② 49　③ $\frac{4}{25}$　④ 0.01

⑤ 3　⑥ 10　⑦ 0.5　⑧ $\frac{3}{7}$

問 4　次の数を，根号を使わずに表しなさい。

① $\sqrt{36}$　② $-\sqrt{81}$　③ $\sqrt{\frac{4}{9}}$

④ $\sqrt{1}$　⑤ $\sqrt{7^2}$　⑥ $\sqrt{(-7)^2}$

問 5　次の数を求めなさい。

① $(\sqrt{7})^2$　② $(-\sqrt{13})^2$　③ $(\sqrt{16})^2$　④ $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$

分数の形で表せる数，すなわち，整数 a と0でない整数 b を用いて $\frac{a}{b}$ と表すことのできる数を**有理数**といいます。いっぽう，$\sqrt{2}=1.41421356\cdots\cdots$ は，分数の形で表すことができません。このような数を**無理数**といいます。

有理数と無理数をあわせて**実数**といいます。

これまでにも数の世界を広げながら学習をしてきました。そして，有理数まで数を広げることで，四則の計算がすべてできるようになりました。

▶▶ $\sqrt{2}$ と有理数との計算を考えてみましょう。

Q $1+\sqrt{2}$ や $2\times\sqrt{2}$ は有理数ですか。

$1+\sqrt{2}$ は有理数ではありません。

また，$2\times\sqrt{2}$ も有理数ではありません。

これらの数はこれまで出てこなかった新しい数です。

ここまでの学習では，$\sqrt{2}$ をふくんだ無理数を考えてきましたが，$\sqrt{3}$ をふくんだ無理数もあります。さらに，$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$，……をふくんだ無理数など，たくさんの無理数があります。

いままでに学んだことをまとめると，次のようになります。

$$\text{実数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正の整数（＝自然数）}\\ 0\\ \text{負の整数}\end{cases}\\ \text{分数}^{※}\end{cases}\\ \text{無理数}\end{cases}$$

●**注意**　上の※の分数とは，整数でない有理数のことです。

数学のまど　数の稠密性

わたしたちは，これまでにも数の世界を拡張してきました。

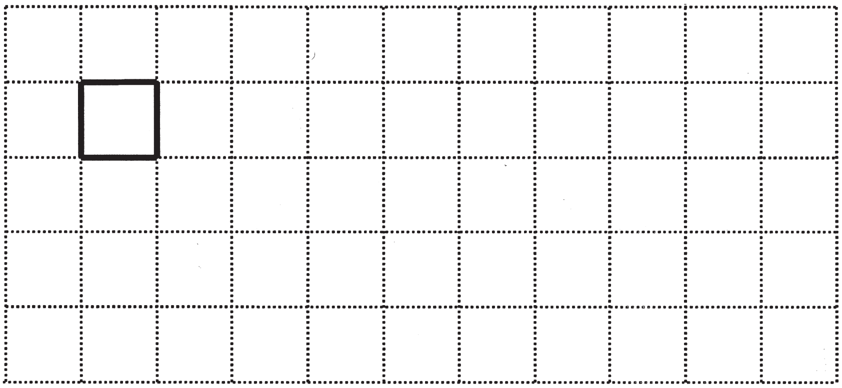
自然数から整数へ拡張したことにより，「いちばん小さい数」がなくなりました。

では，整数から有理数へ拡張したことにより，どのような性質がなくなったのでしょうか。

整数から有理数へ拡張したことにより，次の数をいうことができなくなりました。例えば，整数の範囲ならば，「2 の次の数は何ですか？」と問えば，「3 です。」と答えられました。しかし，有理数へ範囲を広げて考えてみると，「2 の次の数は何ですか？」と問うても，次の数をいうことはできません。このように，2 つの数の間に必ず新しい数が存在するとき，「稠密である」といいます。

2 平方根の大小

Q 下の方眼に，いろいろな面積の正方形をかいてみましょう。

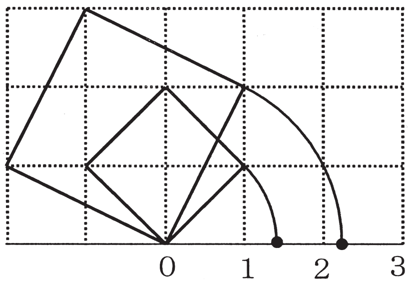


(1目もりは1cm)

▶ $\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ はどちらが大きいか，数直線にのせて，比べてみましょう。

$\sqrt{2}$ と $\sqrt{5}$ の大きさは，右の図のように数直線上に表すことができます。

また，この図から $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ であることがわかります。



正方形の面積が大きくなるにつれて1辺の長さも長くなります。一般に，正の数は，大きくなるにしたがって，その数の正の平方根も大きくなります。

すなわち，平方根の大小について，次のことが成り立ちます。

●平方根の大小●

a，b が正の数で

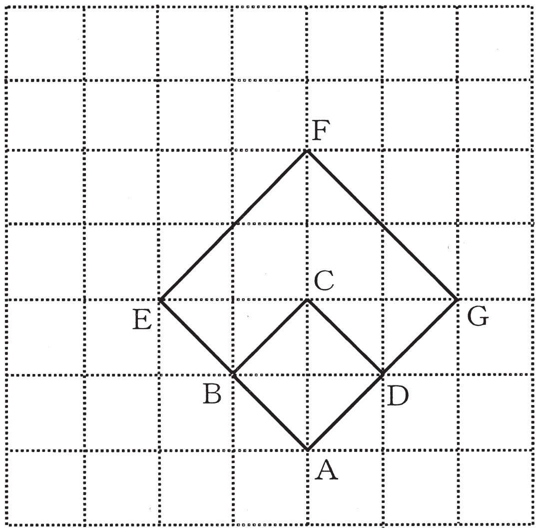
$a < b$ 　ならば　$\sqrt{a} < \sqrt{b}$

3 根号をふくむ式の計算

根号をふくむ式の計算を考えましょう。

■根号をふくむ式の乗除

Q 右の図の正方形について，辺の長さの間に成り立つ関係を，無理数を使って示してみましょう。



AB＋BE＝AE より，次の式が成り立ちます。

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$$

また

$$\sqrt{2}\times 2=\sqrt{8}$$

も成り立ちます。

このことから，次のような計算が成り立つことが考えられます。

$$\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}\times\sqrt{4}$$
$$=\sqrt{2\times 4}$$
$$=\sqrt{8}$$

$$\boxed{\sqrt{2}\times\sqrt{4}=\sqrt{2\times 4}}$$

●注意 $\sqrt{2}\times 2$，$2\times\sqrt{2}$ を $2\sqrt{2}$ と書きます。

Q 電卓を使って，$\sqrt{2}\times\sqrt{5}$ と $\sqrt{2\times5}$ の値を求め，2 つの値が等しいことを確かめなさい。

どんな正の数 a，b についても

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

となります。このことを，確かめてみましょう。

$$\begin{aligned}(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2&=(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\times(\sqrt{a}\times\sqrt{b})\\&=(\sqrt{a})^2\times(\sqrt{b})^2\\&=a\times b\end{aligned}$$

ですから，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は $a\times b$ の平方根です。

また，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$ は正ですから，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は正です。

したがって，$\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ は $a\times b$ の正の平方根ですから

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$$

となります。

除法についても，同じように示すことができます。

●平方根の乗除●

a，b を正の数とするとき

$\boxed{1}$ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　　$\boxed{2}$ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

このことを使うと，根号をふくむ式の乗除ができます。

問　1 次の計算をしなさい。

① $\sqrt{2}\times\sqrt{5}$　② $\sqrt{2}\times\sqrt{8}$　③ $\sqrt{3}\sqrt{12}$

④ $\sqrt{18}\div\sqrt{6}$　⑤ $\sqrt{12}\div\sqrt{3}$　⑥ $\dfrac{\sqrt{80}}{\sqrt{5}}$

問 2 次の数を $\sqrt{a}$ の形になおしなさい。

① $3\sqrt{2}$　　② $4\sqrt{5}$　　③ $3\sqrt{7}$

問 3 次の数を $a\sqrt{b}$ の形になおしなさい。

① $\sqrt{28}$　　② $\sqrt{72}$　　③ $\sqrt{99}$　　④ $\sqrt{200}$

問 4 次の数を変形しなさい。

① $\sqrt{\dfrac{3}{49}}$　　② $\sqrt{0.0002}$　　③ $\sqrt{0.64}$

問 5 次の計算をしなさい。

① $\sqrt{12}\times\sqrt{20}$　　② $\sqrt{18}\times\sqrt{54}$

③ $\sqrt{14}\times\sqrt{21}$　　④ $2\sqrt{3}\times3\sqrt{6}$

Q $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の大きさを，電卓を使って，比べてみましょう。

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の値を小数になおすとき，

$\sqrt{2}\fallingdotseq1.414$ として

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{1.414}\quad,\quad\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.414}{2}$$

を計算することになります。このとき，

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1.414}{2}$ のほうが計算しやすく，およその大きさがわかりやすい。

数を表すときは，その大きさがわかりやすい形で表したほうがよいので，分母は整数で表すように，形を整えることが大切です。

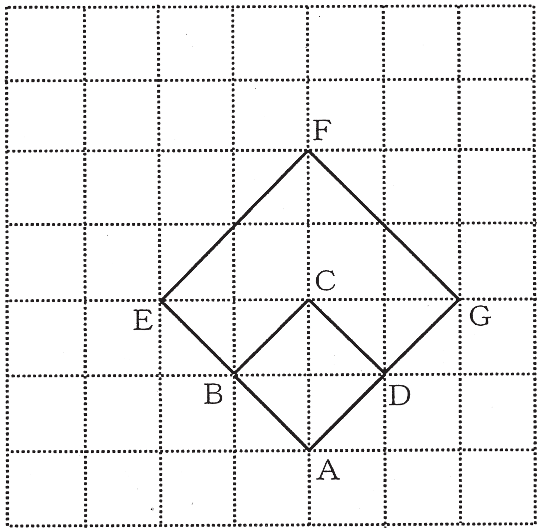
このように，分母に根号がある数を分母に根号がない数に変形することを，その数の**分母を有理化する**といいます。

分母の有理化

$$\frac{b}{\sqrt{a}}=\frac{b\times\sqrt{a}}{\sqrt{a}\times\sqrt{a}}=\frac{b\sqrt{a}}{a}$$

問 6　次の数の分母を有理化しなさい。

①　$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　　②　$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$　　③　$\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$　　④　$\dfrac{6}{\sqrt{8}}$



■根号をふくむ式の加減

次に，加法や減法について考えてみましょう。

乗除のときに用いた図から

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}$$

という加法の式が成り立つことがわかりました。

この等式から

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}=(1+1)\sqrt{2}$$

と考えられますから

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=(1+1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

とすることができます。

▶▶ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　は，1つにまとめることができるでしょうか。

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}\text{※}$$

より，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は，次のように表すことができます。

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

※この計算 $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ は，この次の第２単元で学習します。

しかし，$\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ は，数の大きさがわかりにくい形になっています。したがって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ のほうが，数の大きさがわかりやすいため，この形で 1 つの数を表すことにします。

根号をふくむ式の加減は，以前に学習した文字式の加法・減法と計算方法が同じとみることができます。

$\sqrt{2}+\sqrt{2}=(1+1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

$a+a=(1+1)a=2a$
$a+b=a+b$

問　7　次の計算をしなさい。

① $6\sqrt{6}+2\sqrt{6}$　　② $4\sqrt{5}-\sqrt{5}$

③ $2\sqrt{10}-6\sqrt{10}+7\sqrt{10}$　　④ $\sqrt{2}+2\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{3}$

問　8　次の計算をしなさい。

① $\sqrt{125}-4\sqrt{5}$

② $\sqrt{12}+\sqrt{75}$

③ $4\sqrt{7}+\sqrt{49}-3\sqrt{28}$

④ $2\sqrt{20}-3\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{45}$

問　9　次の計算をしなさい。

① $\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　② $2\sqrt{60}-\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

問　10　次の計算をしなさい。

① $\sqrt{2}\left(1+3\sqrt{2}\right)$　　② $2\sqrt{3}\left(\sqrt{12}-\sqrt{6}\right)$

数学のまど　$\sqrt{2}$ が無理数であることの証明

仮に，$\sqrt{2}$ が有理数であるとしてみましょう。

$\sqrt{2}>0$ ですから，$\sqrt{2}$ は，1 以外に公約数がない 2 つの自然数 a，b を用いて，次のように表すことができます。

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b}$$

両辺を平方して　$2=\dfrac{a^2}{b^2}$

$$2b^2=a^2 \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$2b^2$ は偶数ですから，a^2 も偶数です。したがって，a は偶数であり，n を自然数として

$$a=2n \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

と表すことができます。

(2) を (1) に代入すると

$$2b^2=4n^2$$

すなわち，$b^2=2n^2$ となり，$2n^2$ は偶数ですから，b^2 も偶数となります。したがって，b も偶数です。

このことから，a，b はどちらも偶数となり，公約数 2 をもつから

　　a，b は 1 以外に公約数をもたない

という最初の約束に反することになります。

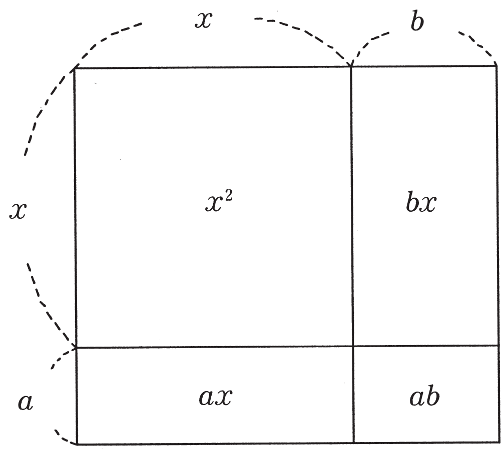
このような不合理が起こったのは，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定したからです。

したがって，$\sqrt{2}$ は有理数ではありえないことになり，$\sqrt{2}$ は無理数であるといえます。

このような証明方法を **背理法** といいます。

第2単元

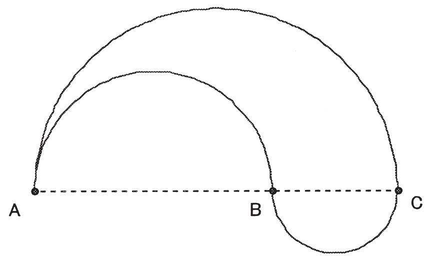
多項式



① 多項式の計算

1 多項式と単項式の乗除

Q 右の図のように1つの直線上に3点A，B，Cと，AB，BC，ACをそれぞれ直径とする半円があります。いま，弧の上を通ってAからCまでいくのに，Bを通る場合と通らない場合とでは，どちらのほうが短いでしょうか。
AB$=a$，BC$=b$ として，次の①，②それぞれの長さをa，bを使って表し，考えてみましょう。



① Bを通る場合

② Bを通らない場合

Bを通る場合の長さを表す式は

$$a\times\pi\div2+b\times\pi\div2=\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi b}{2}$$

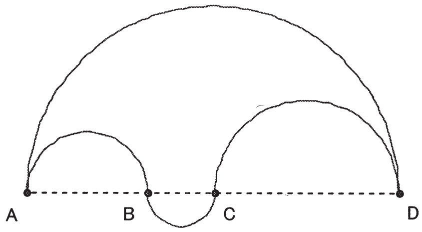
いっぽう，Bを通らない場合は，求める長さはACを直径とする半円の弧ですから，その長さを表す式は

$$(a+b)\times\pi\div2=\frac{\pi(a+b)}{2}=\frac{\pi a+\pi b}{2}=\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi b}{2}$$

したがって，Bを通る場合とBを通らない場合では，長さは等しくなります。

上の問題では，文字を使って考えることによって，BをAC上のどこにとっても，Bを通る場合の長さは等しくなることを示すことができます。

問　1　前ページの **Q** で，1つの直線上に4点A，B，C，Dがあるときはどうですか。前ページの説明にならって考えなさい。



$\pi(a+b)$ の計算では，分配法則が使われています。

$$\pi(a+b)=\pi a+\pi b$$

▶▶単項式と多項式の乗法を，分配法則を使って計算してみましょう。

例　1　①　$2a(3a-5b)$

$=2a\times 3a-2a\times 5b$

$=6a^2-10ab$

②　$(x-2y+5)\times(-3x)$

$=x\times(-3x)-2y\times(-3x)+5\times(-3x)$

$=-3x^2+6xy-15x$

問　2　次の計算をしなさい。

①　$4a(a+3b)$　　②　$(2x-7y)\times(-5x)$

③　$-b(5a-b)$　　④　$\frac{2}{3}x(3x-6)$

⑤　$2a(a-b-c)$　　⑥　$(3x+2y-1)\times(-6x)$

➲➲ 前ページの **Q** や上の問1で，1つの直線上に5点，6点，…あるときについて，同じように考えてみましょう。

▶▶多項式を単項式でわる除法について考えてみましょう。

例 2 ① $(4xy^2+6x^2y)\div 2x=(4xy^2+6x^2y)\times\dfrac{1}{2x}$

$$=\frac{4xy^2}{2x}+\frac{6x^2y}{2x}$$

$$=2y^2+3xy$$

② $(4a^2-ab)\div\dfrac{1}{2}a=(4a^2-ab)\times\dfrac{2}{a}$

$$=\frac{4a^2\times 2}{a}-\frac{ab\times 2}{a}$$

$$=8a-2b$$

> $\dfrac{1}{2}a=\dfrac{a}{2}$ だから
>
> $\dfrac{1}{2}a$の逆数は$\dfrac{2}{a}$

問 3 次の計算をしなさい。

① $(2x^2y-3xy^2)\div y$　　② $(6ab-2ab^2)\div\dfrac{2}{3}a$

③ $(8a^2b+2b)\div(-2b)$　　④ $(6a^2b-9ab^2)\div 3ab$

⑤ $(x^2y+xy^2-x)\div x$　　⑥ $(12a^2b-8ab)\div\dfrac{4}{5}ab$

▶▶やや複雑な計算について考えてみましょう。

例 3 $2x(x+3)+x(2-x)=2x^2+6x+2x-x^2$

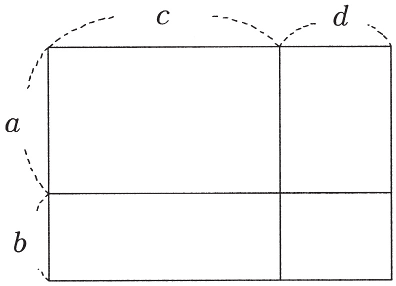
$$=x^2+8x$$

問 4 次の計算をしなさい。

① $2x(x-4)+3x(x+5)$　　② $4a(a-3)-2a(3a-6)$

③ $-3x(5-x)-4x(1+x)$　　④ $a(a+2b)-\dfrac{2}{3}a(a+9b)$

2 多項式の乗法



Q 縦，横の長さが，それぞれ $a+b$，$c+d$ の長方形があります。この長方形の面積を表す式を，いろいろつくってみましょう。

▶▶多項式と多項式の乗法について考えましょう。

$$
\begin{aligned}
&(a+b)(c+d) && c+d \text{ を } M \text{ とおく}\\
&=(a+b)M && \text{分配法則を使ってかっこをはずす}\\
&=aM+bM && M \text{ を } c+d \text{ にもどす}\\
&=a(c+d)+b(c+d) && \text{分配法則を使ってかっこをはずす}\\
&=ac+ad+bc+bd
\end{aligned}
$$

問 1 $a+b=M$ とおいて，$(a+b)(c+d)$ を計算しなさい。

$(a+b)(c+d)$ を計算するには，次のような組み合わせの和をつくればよい。

$$(a+b)(c+d) = \overset{①}{ac} + \overset{②}{ad} + \overset{③}{bc} + \overset{④}{bd}$$

単項式や多項式の積の形の式を，かっこをはずして単項式の和の形に表すことを，はじめの式を**展開する**といいます。

例 1 $(x+3)(y+5)$
$=xy+5x+3y+15$

$5x$
xy
$(x+3)(y+5)$
$3y$
15

問 2 次の式を展開しなさい。

① $(x+6)(y+2)$　　② $(a-3)(b+2)$

③ $(a-b)(c-d)$　　④ $(2x+1)(y-7)$

展開した結果に同類項があるときは，それらをまとめて簡単にします。

例 2　$(3x+2)(x-4)=3x^2-12x+2x-8$

$$=3x^2-10x-8$$

上の計算は，下のように式を縦に並べて展開することもできます。

$$\begin{array}{rrrl}
 & 3x & +2 & \\
\times) & x & -4 & \\
\hline
3x^2 & +2x & & \leftarrow (3x+2)\times x \\
 & -12x & -8 & \leftarrow (3x+2)\times(-4) \\
\hline
3x^2 & -10x & -8 &
\end{array}$$

問 3 次の式を展開しなさい。

① $(x+2)(x+4)$　　② $(x-2)(x-3)$

③ $(2a+b)(a+3b)$　　④ $(2a-b)(3a+4b)$

▶▶かっこの中の式の項が多い場合を考えてみましょう。

例 3　$(a+3)(a+2b-4)$

$=a(a+2b-4)+3(a+2b-4)$

$=a^2+2ab-4a+3a+6b-12$

$=a^2+2ab-a+6b-12$

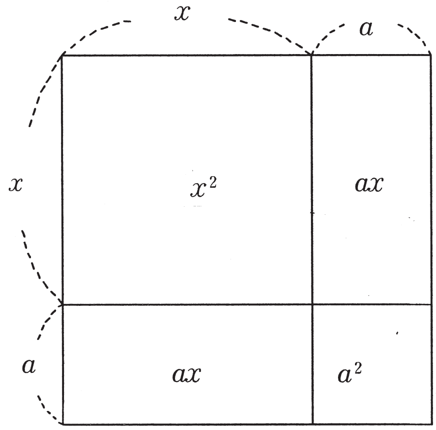
問 4 次の式を展開しなさい。

① $(a-b+2)(a+1)$　　② $(a-5)(a+b-3)$

③ $(2a+b+6)(a-b)$　　④ $(6x-3y)(2x+y-1)$

3 乗法公式

■和の平方，差の平方



$(x+a)^2$ は，どのように展開できるでしょうか。

$(x+a)^2$ は，右の図のように，1 辺が $x+a$ の正方形の面積とみることができます。

1 辺が $x+a$ の正方形は，面積 x^2 と a^2 の 2 つの正方形と面積 ax の長方形 2 つでできていることがわかります。

また，$(x+a)^2$ を展開すると，次のようになります。

$$\begin{aligned}(x+a)^2 &= (x+a)(x+a)\\ &= x^2+ax+ax+a\times a\\ &= x^2+2ax+a^2\end{aligned}$$

また，同様に，$(x-a)^2$ も，次のように展開できます。

$$\begin{aligned}(x-a)^2 &= (x-a)(x-a)\\ &= x^2+(-a)x+(-a)x+(-a)\times(-a)\\ &= x^2-2ax+a^2\end{aligned}$$

公式 1	$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$
公式 2	$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

●注意　公式 1 の a に $-a$ を代入しても，公式 2 を導くことができます。

例 1 $(x+3)^2$ の展開

公式１で，a が３のときですから

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\times 3\times x + 3^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

2倍する

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

2乗する

例 2 $(x-8)^2 = x^2 - 2\times 8\times x + 8^2$

$$= x^2 - 16x + 64$$

例 3 $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2\times 3y\times 2x + (3y)^2$

$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2\times 3y\times 2x + (3y)^2$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

問 1 次の式を展開しなさい。

① $(x+6)^2$　② $(y-5)^2$　③ $(a-b)^2$

④ $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$　⑤ $(2-x)^2$　⑥ $(-x+1)^2$

⑦ $(5x+2)^2$　⑧ $(3x-4y)^2$　⑨ $\left(6y-\frac{1}{2}\right)^2$

⑩ $\left(-\frac{m}{2}+\frac{n}{3}\right)^2$　⑪ $(ab+4)^2$　⑫ $\left(-3a-\frac{2}{3}\right)^2$

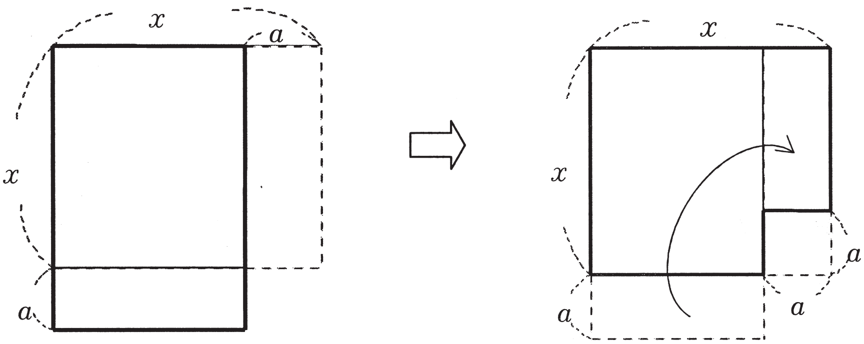
⑬ $(2x+0.5y)^2$

■和と差の積

▶▶ 次に $(x+a)(x-a)$ の展開を考えてみましょう。

Q 面積が $(x+a)(x-a)$ を表す長方形をかいてみましょう。

面積が $(x+a)(x-a)$ の長方形は，下の図のように，面積 x^2 の正方形の右隅が面積 a^2 の正方形の分だけ欠けている形に変形することができます。



公式３　$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

例 4 ① $(x+6)(x-6)=x^2-6^2$

$=x^2-36$

② $(4x+5y)(4x-5y)=(4x)^2-(5y)^2$

$=16x^2-25y^2$

問 2 次の式を展開しなさい。

① $(x+3)(x-3)$　② $(a+b)(a-b)$　③ $(x+5)(x-5)$

④ $(x-8)(x+8)$　⑤ $(2+x)(2-x)$　⑥ $\left(y+\frac{1}{7}\right)\left(y-\frac{1}{7}\right)$

⑦ $(a+4)(4-a)$　⑧ $(3x+y)(3x-y)$

⑨ $(-2x+3y)(-2x-3y)$　⑩ $(-4a-3)(4a-3)$

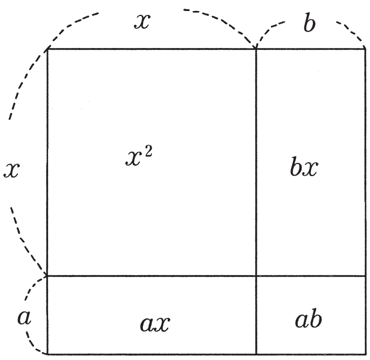
■ $x+a$ と $x+b$ の積

Q 次の式を展開して $x^2+■x+▲$の形にしたとき，■，▲はどんな数になるでしょうか。

① $(x+4)(x+3)$　　　　② $(x+4)(x-3)$

公式4　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

問 3 公式4の左辺を展開して，この式が成り立つことを確かめなさい。



例 5 $(x+2)(x+7)$ の展開

公式4で，a が2，b が7のときですから

$(x+2)(x+7)$

$=x^2+(2+7)x+2\times7$

$=x^2+9x+14$

加える

$(x+2)(x+7)=x^2+9x+14$

かける

例 6 $(x+3)(x-4)$

$=(x+3)\{x+(-4)\}$

$=x^2+\{3+(-4)\}x+3\times(-4)$

$=x^2-x-12$

$(x+3)\{x+(-4)\}$

$(x+a)(x+b)$

問 4　次の式を展開しなさい。

① $(x+3)(x+6)$　　② $(x+1)(x-3)$

③ $(x+1)(x+2)$　　④ $(x+5)(x-2)$

⑤ $(x-3)(x-4)$　　⑥ $(x+3)(x+5)$

⑦ $(a-7)(a-3)$　　⑧ $(x-6)(x+5)$

⑨ $(x-2)(x+4)$　　⑩ $\left(y-\frac{2}{3}\right)\left(y+\frac{1}{3}\right)$

例 7

$(pq+1)(pq+3)$

$=(pq)^2+(1+3)pq+1\times 3$

$=p^2q^2+4pq+3$

$$(pq+1)(pq+3)$$

$$(x+a)(x+b)$$

問 5　次の式を展開しなさい。

① $(2a+7)(2a+3)$　　② $(3x-4)(3x-2)$

③ $(ab+3)(ab-6)$　　④ $\left(\frac{1}{2}x+5\right)\left(\frac{1}{2}x-3\right)$

乗法公式1 ～ 4を利用して，いろいろな式を展開してみましょう。

問 6　次の式を展開しなさい。

① $(x-4)^2$　　② $(x-6)(x+4)$

③ $(x+7)(x-7)$　　④ $(x+y)^2$

⑤ $(3x-7)(3x+7)$　　⑥ $(5x-2y)(5x-y)$

⑦ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$　　⑧ $(9-x)(9+x)$

⑨ $\left(\frac{2}{5}x-\frac{5}{2}y\right)^2$　　⑩ $(x+y)(-x+y)$

⑪ $(x+y)(-x-y)$　　⑫ $(x-y)(-x-y)$

■乗法公式の式の計算への利用

乗法公式は，いろいろな式の計算で用いられます。

例 8 $2(x+5)^2-(x+3)(x-3)$ を計算してみましょう。

$$
\begin{aligned}
2(x+5)^2-(x+3)(x-3) &= 2(x^2+10x+25)-(x^2-9) \\
&= 2x^2+20x+50-x^2+9 \\
&= x^2+20x+59
\end{aligned}
$$

問 7 次の計算をしなさい。

① $4(a+1)^2-(2a-1)^2$

② $2(x+1)(x-1)-(x-3)(x+2)$

③ $(x-3)^2+(x+4)(x-3)$

④ $(2a+b)^2-(2a-b)(a-b)$

⑤ $(3x+2)(3x-2)-(2x-1)(2x+3)$

例 9 $(a+b+1)(a+b+2)$ を展開しなさい。

<考え方> $a+b$ を1つの文字でおくと
乗法公式が利用できます。

$$(a+b+1)(a+b+2)$$

$$(X+1)(X+2)$$

<解答> $a+b=X$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&(a+b+1)(a+b+2) \\
&=(X+1)(X+2) \\
&=X^2+3X+2 \\
&=(a+b)^2+3(a+b)+2 \\
&=a^2+2ab+b^2+3a+3b+2
\end{aligned}
$$

問 8 次の式を展開しなさい。

① $(x+y+3)(x+y-5)$

② $(x-y+2)(x-y-2)$

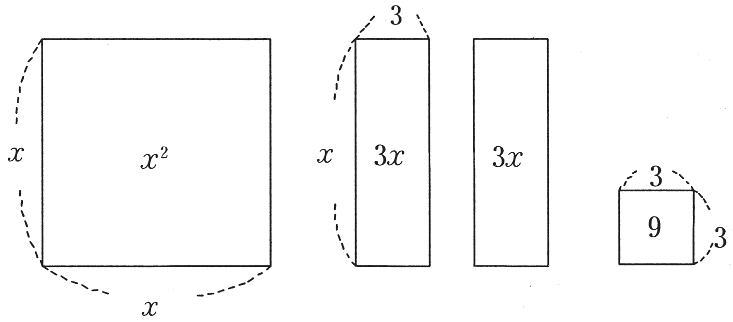
③ $(a-b-1)^2$

④ $(a-b+4)(a+b+4)$

② 因数分解

1 因数分解

Q 下の図のような 4 枚の長方形や正方形の紙を並べ，1 つの正方形をつくってみましょう。できた正方形の 1 辺の長さはどれだけでしょうか。



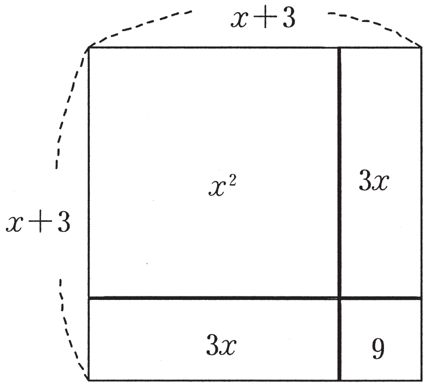
乗法公式 1 を逆に使えば

$$x^2+6x+9=(x+3)^2$$

となります。

これは，多項式 x^2+6x+9 を，$x+3$ の平方として表したことになります。

図で考えると，面積 x^2+6x+9 をもつ図形として，右の図のように，1 辺が $x+3$ の正方形をつくったことになります。



$x^2+6x+9=(x+3)^2$ と表したとき，$x+3$ を多項式 x^2+6x+9 の**因数**といいます。

また，x^2+6x では，$x^2+6x=x(x+6)$ ですから，x と $x+6$ は，それぞれ x^2+6x の因数です。

多項式をいくつかの因数の積として表すことを，その多項式を**因数分解**するといいます。

$$x^2+6x+9 \underset{\text{展開}}{\overset{\text{因数分解}}{\rightleftarrows}} (x+3)^2$$

■共通因数

多項式の各項に共通な因数があるとき，それをかっこの外にくくり出して，因数分解することができます。

$$ma+mb+mc=m(a+b+c)$$

例 1 ① $3x^2+6xy$

$=3x\times x+3x\times 2y$

$=3x(x+2y)$

$3x^2=3\times x\times x$

$6xy=2\times 3\times x\times y$

② $ax-2ay+3az$

$=a(x-2y+3z)$

●注意 上の①は，$3x^2+6xy=x(3x+6y)$ としても因数分解したことになりますが，ふつうは上の例のように，できるかぎり因数分解します。

問 2 次の式を因数分解しなさい。

① $ax-bx$　② $6mx-2nx$　③ xy^2-x^2y

④ $5x^2-10xy$　⑤ $4a^2b-6ab^2-10ab$　⑥ x^2-x

2　乗法公式を利用する因数分解

乗法公式1を逆にみれば，次のようになります。

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

これは，左辺が因数分解されて，右辺の $(x+a)^2$ になることを示しています。

ここでは，乗法公式を逆に使って，因数分解をすることを考えましょう。

公式 1′　$\boldsymbol{x^2+2ax+a^2=(x+a)^2}$
公式 2′　$\boldsymbol{x^2-2ax+a^2=(x-a)^2}$

例 1　$x^2+10x+25$ の因数分解

$10=2\times5,\ 25=5^2$

ですから，公式 1′ を利用して因数分解することができます。

$$x^2+\underbrace{10}_{2\times5}x+\underbrace{25}_{5^2}$$

$$\begin{aligned} x^2+10x+25 &= x^2+2\times5\times x+5^2 \\ &= (x+5)^2 \end{aligned}$$

例 2　
$$\begin{aligned} x^2-6xy+9y^2 &= x^2-2\times3y\times x+(3y)^2 \\ &= (x-3y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} x^2-6xy+9y^2= & x^2 & - & 2\times 3y\times x & + & (3y)^2 & = & (x-3y)^2 \\ & x^2 & - & 2\ a\ x & + & a^2 & = & (x-a)^2 \end{array}$$

問 1　次の式を因数分解しなさい。

① $x^2+8x+16$　　② $a^2-12a+36$

③ $x^2-20xy+100y^2$　　④ $4x^2+12xy+9y^2$

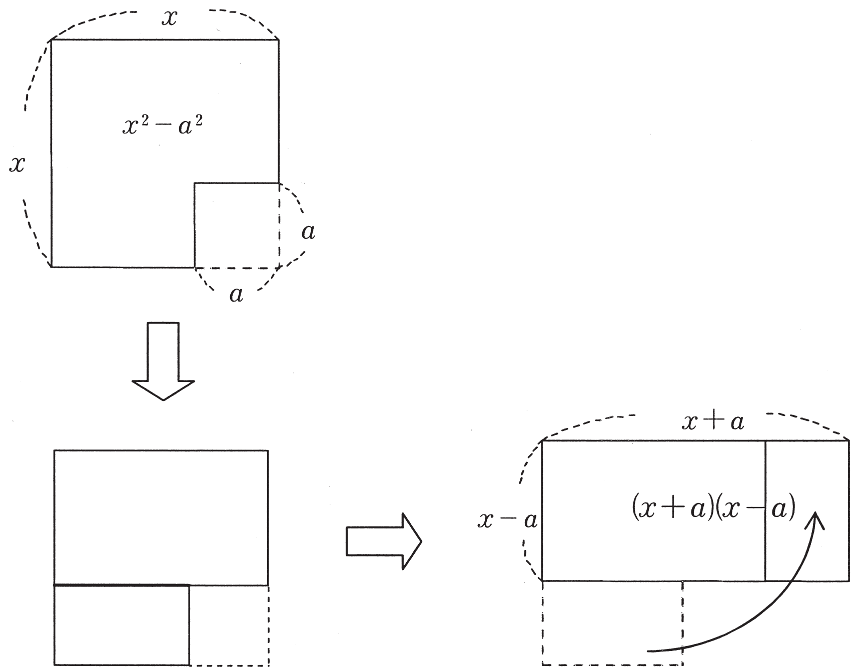
問　2　次の式を因数分解しなさい。

① $y^2-14y+49$　　　② $9a^2+30a+25$

③ $a^2+4ab+4b^2$　　　④ $x^2-x+\frac{1}{4}$

公式 3′　　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

この因数分解を，図形の面積をもとに考えてみましょう。



x^2-a^2 は，上の図のように1辺が x の正方形の右隅から1辺 a の正方形が切り取られている図形の面積と考えられます。この図形の下側の長方形を切り取り，矢印のように移動すると，できた長方形の縦の長さは $x-a$ ，横の長さは $x+a$ で，その面積は $(x+a)(x-a)$ となります。

例 3 ① $x^2-25=x^2-5^2$

$=(x+5)(x-5)$

② $4x^2-9y^2=(2x)^2-(3y)^2$

$=(2x+3y)(2x-3y)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 4x^2-9y^2=(2x)^2 & - & (3y)^2 & = & (& 2x & + & 3y &)(& 2x & - & 3y &) \\ | & & | & & & | & & | & & | & & | \\ x^2 & - & a^2 & = & (& x & + & a &)(& x & - & a &) \end{array}$$

問 3 次の式を因数分解しなさい。

① a^2-4　　② $16x^2-49$

③ $4a^2-25b^2$　　④ $x^2-\dfrac{y^2}{4}$

問 4 次の式を因数分解しなさい。

① x^2-100　　② $4a^2-1$

③ $9-16a^2$　　④ $\dfrac{9}{25}x^2-4y^2$

▶▶いままで学習した下の3つの公式を使って，x^2+px+q の因数分解を考えてみましょう。

公式 1′　$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

公式 2′　$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

公式 3′　$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

Q 次の■，▲にあてはまる数は何でしょうか。

$$x^2+6x+■=(x+▲)^2$$

例 4 x^2+6x-7 の因数分解

平方の形にするため，公式 1′ をもとに考えると，x の係数 6 の $\frac{1}{2}$ の 2 乗の 9 があれば，公式 1′ を使うことができます。

式にかってに 9 をたすことはできないので，9−9 を加えることにします。9−9=0 なので，9−9 を加えても式の値は変わりません。

$$\begin{aligned}
&x^2+6x-7\\
&=x^2+6x+(9-9)-7\\
&=(x^2+6x+9)-9-7\\
&=(x+3)^2-16\\
&=(x+3)^2-4^2\\
&=\{(x+3)+4\}\{(x+3)-4\}\\
&=(x+7)(x-1)
\end{aligned}$$

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$ を使って

この式を因数分解するときに

$$\begin{aligned}
&(x+3)^2-16\\
&=(x+3)^2-4^2\\
&=\{(x+3)+4\}\{(x+3)-4\}
\end{aligned}$$

とする場面が出てきます。

$$((x+3))^2-16$$

$$X^2 \quad -16$$

ここでは，$x+3=X$ とおいて X の式とみて因数分解します。

例 5 $(x+2)^2-25$ の因数分解

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2-25\\
&=(x+2)^2-5^2\\
&=\{(x+2)+5\}\{(x+2)-5\}\\
&=(x+7)(x-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\boxed{x+2})^2-25\\
&=X^2 \quad -25\\
&=(X+5)(X-5)\\
&=\{(\boxed{x+2})+5\}\{(\boxed{x+2})-5\}
\end{aligned}$$

例 6 $(x-3)^2-5$ の因数分解

$$
\begin{aligned}
&(x-3)^2-5\\
&=(x-3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\\
&=\left\{(x-3)+\sqrt{5}\right\}\left\{(x-3)-\sqrt{5}\right\}\\
&=\left(x-3+\sqrt{5}\right)\left(x-3-\sqrt{5}\right)
\end{aligned}
$$

問 5 次の式を因数分解しなさい。

① $(x-2)^2-49$　　② $(x+5)^2-4$

③ $(x+6)^2-6$　　④ $(x-7)^2-18$

▶▶次に，x^2+px+q を平方の形になおす方法を考えてみましょう。

一般に，x^2+px という形の式を平方の形にするには，x の係数 p の $\frac{1}{2}$ の2乗，すなわち，$\left(\frac{p}{2}\right)^2$ を加えればよい。式を平方の形にすることを**平方完成**するといいます。

問 6 次の式を平方の形にするには，何を加えればよいでしょうか。加える数を求めなさい。

① x^2+10x　　② x^2-4x

③ x^2+7x　　④ $x^2-\frac{1}{2}x$

x^2+px+q を因数分解するときは，$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ を加えて平方の形をつくればよい。$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2=0$ なので，$\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2$ を加えても式の値は変わりません。

問 7 次の式を因数分解しなさい。

① $x^2-10x+16$　　　　② x^2+3x-4

例 7 x^2+3x+1 を因数分解しなさい。

〈考え方〉 この式に $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ を加えて，平方の形をつくります。

$$
\begin{aligned}
&x^2+3x+1\\
&=x^2+3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1\\
&=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+1\\
&=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\\
&=\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}\\
&=\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

問 8 次の式を因数分解しなさい。

① x^2+4x-4　　　　② x^2-5x+2

公式4を逆にみれば，次のようになります。

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

これは，左辺が因数分解されて，右辺の $(x+a)(x+b)$ になることを示しています。

このように，x^2+px+q の形の式の中には，乗法公式を逆に使って簡単に因数分解できるものもあります。

公式 4′　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

例 8　x^2+5x+6 の因数分解

公式 4′ を使って因数分解するには

$$a+b=5,\ ab=6$$

すなわち，和が 5，積が 6 になる数 a，b をみつければよい。

$$x^2+5x+6$$
$$x^2+(a+b)x+ab$$

積が 6 で，和が 5 になる 2 つの数は 2 と 3 です。したがって

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$$

例 9　$x^2+2x-15$ の因数分解

積が -15 で，和が 2 になる 2 つの数は，-3 と 5 ですから

$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$$

問 9　次の式を因数分解しなさい。

① $x^2+7x+12$　　② x^2-2x-8

③ x^2-6x+5　　④ x^2-x-6

⑤ $x^2+3x-10$　　⑥ $x^2+10x+21$

⑦ $x^2+9x+14$　　⑧ x^2+x-30

⑨ $x^2-16x+28$　　⑩ x^2-7x-8

問 10　次の式を因数分解しなさい。

① $6a^2+8ab-4a$　　② $3a^2b-5ab+ab^2$

③ $x^2+5x-36$　　④ $a^2-3a-28$

⑤ $x^2-9x+18$　　⑥ $a^2-8ab+16b^2$

⑦ x^2+8x+7　　⑧ $25x^2-36y^2$

⑨ $25x^2+30xy+9y^2$　　⑩ $1-2x+x^2$

3　いろいろな因数分解

▶▶いままで学習したことを使って，いろいろな因数分解を考えてみましょう。

例　1　$-2x^2-4x+16$

共通因数 -2 をくくり出す。

$=-2(x^2+2x-8)$

かっこの中を因数分解する。

$=-2(x+4)(x-2)$

問　1　次の式を因数分解しなさい。

① $3x^2+18x-48$

② $18x^2-50$

③ $-3y^2+18y-27$

④ $2x^2y-8xy+6y$

例　2　$(x+y)^2+3(x+y)+2$　を因数分解しなさい。

<考え方>　$x+y=X$ とおき，X の式とみなして因数分解します。

<解答>　$x+y=X$ とおくと

$(x+y)^2+3(x+y)+2$

$=X^2+3X+2$

$=(X+1)(X+2)$

$=(x+y+1)(x+y+2)$

$$(x+y)^2+3(x+y)+2$$

$$X^2\quad+\quad3X\quad+2$$

問　2　次の式を因数分解しなさい。

① $(a+b)x+(a+b)(y+z)$

② $(a+b)^2+4(a+b)+4$

③ $(x+3)^2-10(x+3)+16$

④ $a(x-y)-bx+by$

3　式の計算の利用

▶▶これまでに学んだ式の展開や因数分解を利用して，いろいろな問題を考えてみましょう。

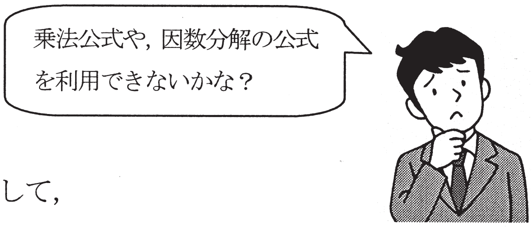
■数の計算への利用

例　1　次の式を，くふうして計算しなさい。

①　92×88

②　29^2

③　$28^2 - 22^2$



〈考え方〉①　$92 = 90 + 2$，$88 = 90 - 2$　として，
乗法公式3を利用します。

②　$29 = 30 - 1$ として，乗法公式2を利用します。

③　因数分解の公式 3′ を利用します。

問　1　例1のそれぞれの式を計算しなさい。

問　2　次の式を，くふうして計算しなさい。

①　47×53　　②　99^2

③　102^2　　④　$35^2 - 25^2$

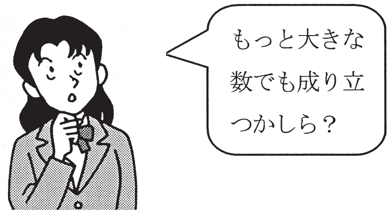
問　3　$x = 98$ のとき，$x^2 + 4x + 4$ の値を求めなさい。

➲➲ 乗法公式や因数分解の公式を利用して計算する問題を，問2や問3にならって，いろいろつくってみましょう。

■式による証明

Q 4，6のように，2つの続いた偶数があります。この2つの偶数の積に1を加えると，結果はどうなるでしょうか。いくつか例を考えてみましょう。

2と4では	$2\times4+1=9$
4と6では	$4\times6+1=25$
6と8では	$6\times8+1=49$



例 2 2つの続いた偶数の積に1を加えると，この2つの偶数の間にある奇数の平方になります。このことを証明しなさい。

<解答> 整数 n を使って

2つの続いた偶数は　$2n$，$2n+2$

その間にある奇数は　$2n+1$

と表されます。

この2つの偶数の積に1を加えると

$$\begin{aligned}2n(2n+2)+1&=4n^2+4n+1\\&=(2n+1)^2\end{aligned}$$

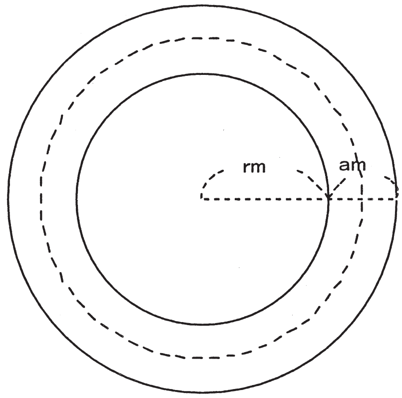
すなわち，2つの偶数の間にある奇数の平方になります。

問 4 3つの続いた整数では，それら3つの整数の積に中央の数を加えると，中央の整数の3乗に等しくなります。このことを，中央の整数を n として証明しなさい。

$$\cdots3,\ 4,\ 5\cdots$$
$$3\times4\times5+4$$
$$||$$
$$4^3$$

▶▶ 式の計算を利用して，図形の問題を考えてみましょう。

例 3 半径 r m の円形の土地の周囲に幅 a m の道があります。この道の面積を S m²，道の真ん中を通る円周の長さを ℓ m として，次の問に答えなさい。



① $S=\pi(2r+a)a$ となることを示しなさい。

② $S=a\ell$ を証明しなさい。

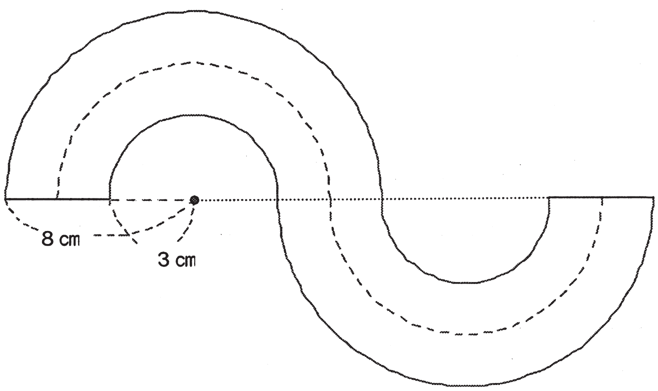
<考え方>① S は次の式で表されます。この式を計算します。

$$S=\pi(r+a)^2-\pi r^2$$

② ℓ を a と r を使って表し，それを $a\ell$ に代入して考えます。

問 5 例3の①，②に答えなさい。

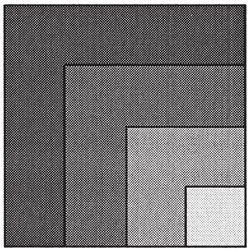
問 6 下の図は，半円を組み合わせたものです。この形の面積を求めなさい。



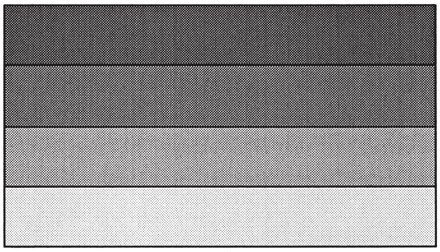
やってみよう！

下の図のように，面積が，x^2 の正方形，$6x$ の長方形，1×8 の長方形があります。これらの面積の和は，x^2+6x+8 です。これらを組み合わせて 1 つの長方形にしてみましょう。そして，そのときの操作と式変形を対応させてみましょう。

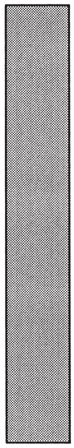
面積 x^2 の正方形



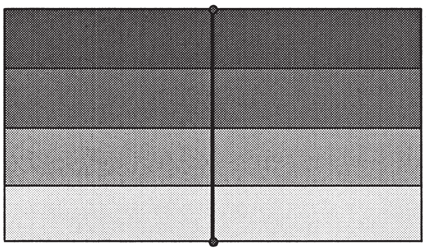
面積 $6x$ の長方形



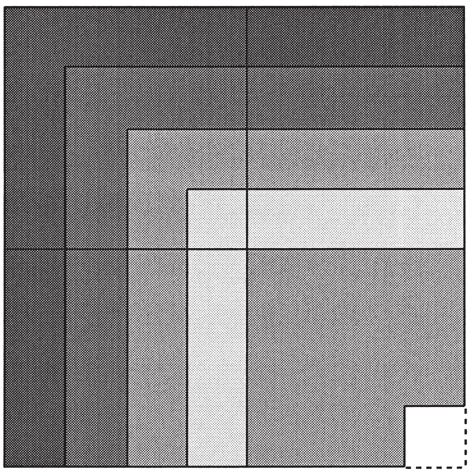
面積 1×8 の長方形



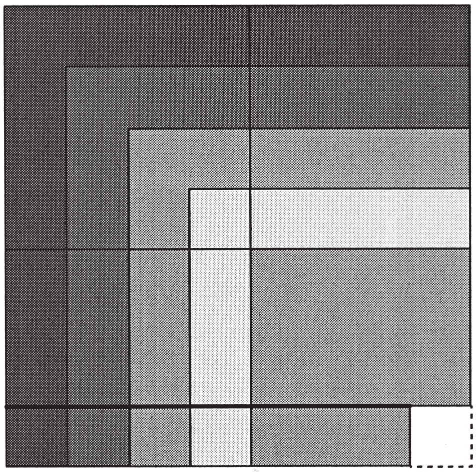
$\boxed{1}$ $6x$ を $3x$ ずつに分けます。



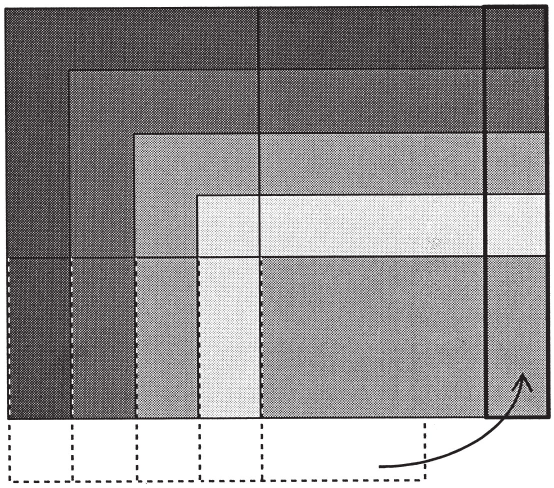
$\boxed{2}$ $3x$ ずつに分けた長方形を，面積 x^2 の正方形に右の図のようにはりつけます。さらに，1×8 の長方形を分解してうめていきます。
すると右隅に 1 の正方形の分だけ欠けた図形ができます。



3 右の図のように，太線で切り取ります。



4 切り取った部分を矢印のところへはりつけると長方形となります。
この長方形の面積は
$(x+2)(x+4)$
です。



この操作を式変形では，次のように書くことができます。

$$
\begin{aligned}
& x^2+6x+8 \\
&=x^2+6x+9-9+8 \\
&=(x+3)^2-9+8 \\
&=(x+3)^2-1^2 \\
&=\{(x+3)-1\}\{(x+3)+1\} \\
&=(x+2)(x+4)
\end{aligned}
$$

この解き方をもとに，x^2+px+q を因数分解してみましょう。

$$
\begin{aligned}
&x^2+px+q\\
&=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q\\
&=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\\
&=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}\\
&=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2\\
&=\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{p}{2}\right)-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right\}\\
&=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)
\end{aligned}
$$

さらに，x^2 に係数がある ax^2+bx+c の因数分解はどうなるでしょうか。

$$
\begin{aligned}
&ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\\
&=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)
\end{aligned}
$$

例 1　$2x^2+x-3$ を，前ページにならって因数分解してみましょう。

$2x^2+x-3$ で，$a=2$，$b=1$，$c=-3$ です。

まず，$\sqrt{b^2-4ac}$ を計算します。

$$\begin{aligned}\sqrt{b^2-4ac}&=\sqrt{1^2-4\times2\times(-3)}\\&=\sqrt{1+24}\\&=\sqrt{25}\\&=5\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\&=2\times\left(x+\frac{1+5}{2\times2}\right)\left(x+\frac{1-5}{2\times2}\right)\\&=2\times\left(x+\frac{6}{4}\right)\left(x+\frac{-4}{4}\right)\\&=2\times\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)\\&=(2x+3)(x-1)\end{aligned}$$

問 1　$(2x+3)(x-1)$ を展開して，$2x^2+x-3$ となることを確かめなさい。

問 2　次の式を，例 1 にならって因数分解しなさい。

① $5x^2+7x+1$　　② x^2-x-4

③ $2x^2+3x-5$　　④ $5x^2+5x-1$

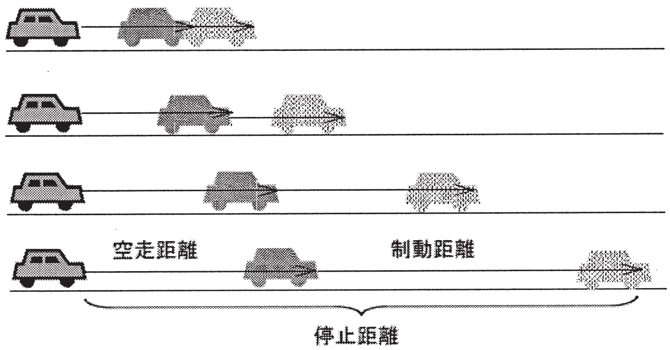
⑤ x^2+4x-3　　⑥ $2x^2-12x+18$

第3単元

事象と関数

① 事象と関数

1 停止距離の数学



自動車のブレーキを踏んで停止するまでの距離は，自動車の速度によって変わります。速度が遅ければすぐ止まりますが，速度が速ければ急ブレーキをかけてもすぐには止まりません。

高速道路では，自動車は時速 80km から 100km 程度の速度で走ります。ところどころに車間距離を測定する表示が設置されており，前の自動車との車間距離を，およそ 100m とるように指示されていますが，この数値はどのように導き出されたのでしょうか。

危険に気づいてからブレーキを踏むまでに進む距離を「空走距離」，ブレーキを踏んでから自動車が止まるまでの距離を「制動距離」，空走距離と制動距離の和を「停止距離」といいます。

ある自動車 A について調べたところ，時速 $x$km で走行しているときの空走距離と制動距離は，次のようになっていました。

空走距離 … $0.21x$ m

制動距離 … $0.012x^2$ m

問 1 自動車 A が時速 100km で走行しているときの空走距離を求めなさい。

▶▶この自動車 A にとって，「高速道路での車間距離は 100m」という決まりは，安全な車間距離だといえるでしょうか。

停止するまでに進む距離(停止距離)は

$$(\text{停止距離}) = (\text{空走距離}) + (\text{制動距離})$$

なので，時速 $x$km で走行しているときの停止距離を ym とすると，次の式が成り立ちます。

$$y = 0.21x + 0.012x^2 \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

例　1　(1)の式を用いて，自動車 A が時速 100km で走行しているときの停止距離を求め，車間距離は 100m で安全といえるかどうかを判断してみましょう。

$y = 0.21x + 0.012x^2$ に $x = 100$ を代入すると

$$\begin{aligned} y &= 0.21 \times 100 + 0.012 \times 100^2 \\ &= 21 + 120 \\ &= 141 \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

自動車 A は，時速 100km で走行している場合，その停止距離は 141m にも及ぶので，車間距離は 100m では安全ではなく，少なくとも 150m 程度は保たないと危険だということがわかります。

Q　(1) の式で $y = 100$ とすると，$100 = 0.21x + 0.012x^2$ という方程式ができます。この方程式の解，すなわち，停止距離が 100m となるときの速度を，電卓を用いて探してみましょう。

$y = 100$ のときの x の値は，およそ 83 になります。したがって，自動車 A では，時速 83km で走行しているときの停止距離が 100m になることがわかります。

技術の向上にともない，制動距離が短い自動車Bが開発されました。この自動車が時速 $x$km で走行しているときの停止距離を ym とすると，次のようになるそうです。

$$y=0.21x+0.006x^2 \qquad \cdots\cdots \quad (2)$$

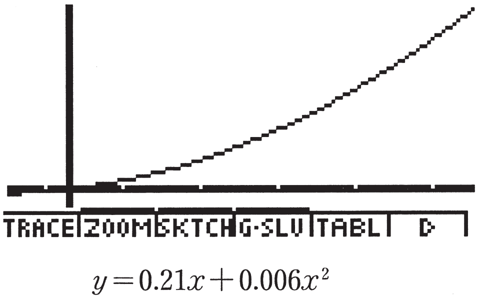
問 2 自動車Bが時速 100km で走行しているときの停止距離を求めなさい。

問 2 から，自動車Bの場合は，時速 100km で走行しているときの車間距離を 100m と定めることは，適切だと考えられます。しかし，雨や雪が降ったときのように，路面が滑りやすくなっていたり，タイヤがすり減っていたりすることもあるので，車間距離は余裕をもってあけておくことが大切です。

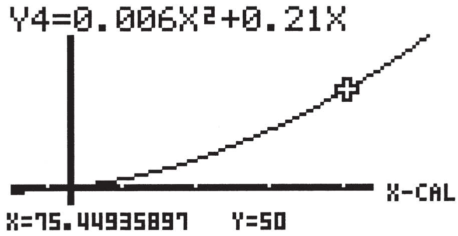
▶▶自動車Bが走行していると，前の自動車に近づき，車間距離が 50m になりました。このまま進むとぶつかってしまいます。車間距離は 50m を保つものとして，安全に走行するには時速を何 km 以下にする必要があるか，考えてみましょう。

グラフ電卓を使って，$y=0.21x+0.006x^2$ のグラフをかき，車間距離が 50m のときの安全な速度を調べてみましょう。

グラフ電卓に $y=0.21x+0.006x^2$ の式を入力してグラフをかくと，次のようになります。



$y=0.21x+0.006x^2$
のグラフをかく



G-SLV機能で $y=50$ に
対応する x の値を求める

$y=0.21x+0.006x^2$は，yがxの2次式で表されています。このように，yがxの2次式で表されるとき，yはxの**2次関数**であるといいます。

$y=0.21x+0.006x^2$ のグラフは**放物線**というなめらかな曲線になります。つまり，2次関数のグラフは放物線になります。

G-SLV 機能を使うと，$y=50$ のときのグラフ上の点がわかり，x座標を読み取ることができます。これにより，自動車Bでは，車間距離が 50m のときは，時速 75km をこえると危険であることがわかります。

このG-SLV 機能は，$y=0.21x+0.006x^2$ の式において，$y=50$ のときのxの値を求めているので，次の等式をみたすxの値を求めることと同じです。

$$0.21x+0.006x^2=50$$

問 3 $0.21x+0.006x^2=50$ を利用して，自動車Bでは，車間距離が 50m のときは，時速 75kmをこえると危険であることを説明しなさい。

これまで，時速と停止距離の関係について，時速から停止距離を求めたり，停止距離から時速を判断したりしてきました。時速 $x$km に対応した停止距離 ym を求める場合は「yはxの関数」と考えていて，停止距離ym に対応した時速$x$km を求める場合は，「xはyの関数」と考えています。これらは，おたがいに，先に決める変数（独立変数）とそれにともなって決まる変数（従属変数）が逆になっています。このようなとき，一方の関数を他方の関数の**逆関数**といいます。

数学のまど　Ｆ１カーの停止距離

モータースポーツの最高峰 F1(Formula-one)レースは，時速 300km ものスピードで走行します。もしF1 カーの性能を表す式が (1) や (2) と同じだったら，停止距離はどうなるでしょうか。

(1)の場合

$y=0.21x+0.012x^2$　に　$x=300$　を代入すると

$y=1143$ (m)

したがって，停止距離は 1143m となります。

(2)の場合

$y=0.21x+0.006x^2$　に　$x=300$　を代入すると

$y=603$ (m)

したがって，停止距離は 603m となります。

自動車Ａと同じ性能だとすると，停止距離が 1000mをこえてしまうことがわかります。性能が向上した自動車Bと同じだとしても，600m にも及びます。しかし，実際には，F1 カーが時速 300km 程度で走行していた場合の制動距離は，およそ 100m ほどまで短縮されている事実もあります。F1 カーは，「高速スピードが出る」という優れた性能をもっていることは当然ですが，「早く停止する」という安全性についても優れた性能をもっているのです。

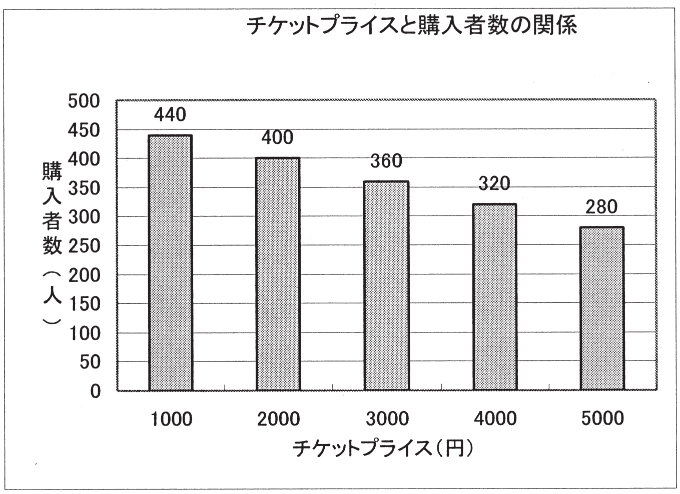
参考　昭和シェル石油のホームページ（http://ms.showa-shell.co.jp/f1/whats/）には，「超音速旅客機コンコルドからヒントを得たカーボンブレーキのストッピングパワーによって時速 350km のとき，静止までに必要な制動距離は約 100m という驚異的な短さを誇る。」と記されています。

2 チケットプライスの数学

Q あるイベント会社がコンサートを企画します。企画する以上はできるだけ多くの売上げを得ようとします。このとき，コンサートチケットの値段をあなただったらどのような考えで設定しますか。

できるだけ多くの売上げを得ようとするとき，コンサートチケットの値段を高くすればよいと考えたのですが，あまり高くしすぎると購入者が減ってしまいそうです。だからといって安くしすぎると，たくさんの人が購入してくれるかもしれませんが，多くの売上げは見込めません。さて，チケットプライスをどのように設定したら，もっとも多くの売上げが得られるのでしょうか。

イベント会社に勤める田中さんは，チケットプライスとチケット購入者数の関係について調べてみました。すると，下のグラフのような関係になることがわかりました。



Q チケットプライスと購入者の関係のグラフをみて，わかることをあげてみましょう。

▶▶チケットプライスと購入者数や，売上げの関係を式で表してみましょう。

チケットプライスをx円としたとき，購入者数をxを使った式で表すと，どうなるでしょうか。

グラフから，チケットプライスを1000円高くすると，購入者数は40人ずつ減ることがわかります。このことから，チケットプライスがx円のときの購入者数は

$$(-0.04x+480)\text{ 人}$$

となり，購入者数はチケットプライスの１次式で表されることがわかります。

次に，チケットプライスをx円，売上げをy円としたとき，xとyの関係はどのような式になるか，考えてみましょう。

売上げは，チケットプライスと購入者数の積で求められるので，それぞれのチケットプライスのときの売上げは，次のようになります。

チケットプライス（円）	購入者数　（人）	売上げ　（円）
1000	440	440000
2000	400	800000
3000	360	1080000
4000	320	1280000
5000	280	1400000
⋮	⋮	⋮
x	$-0.04x+480$	$x(-0.04x+480)$

つまり，yはxの２次関数で，次の式が成り立ちます。

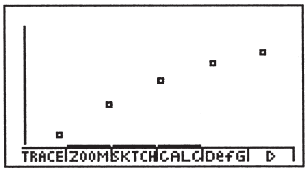
$$y=-0.04x^2+480x$$

▶▶チケットプライスをさらに高くした場合の売上げはどのようになるか調べ，もっとも多くの売上げが得られるチケットプライスと，そのときの売上げを求めてみましょう。

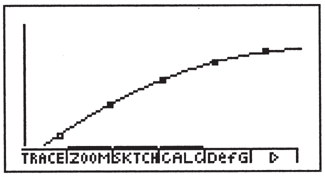
グラフ電卓を用いて調べてみましょう。

チケットプライスと売上げの関係

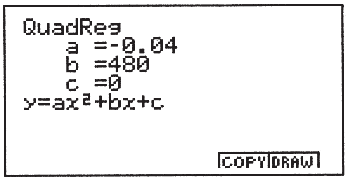
（x 軸＝チケットプライス，y 軸＝売上げ）



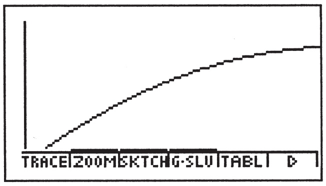
相関図
（放物線・2次関数）



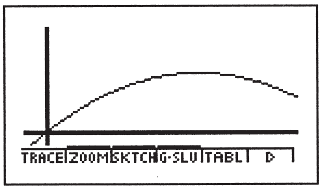
回帰グラフ



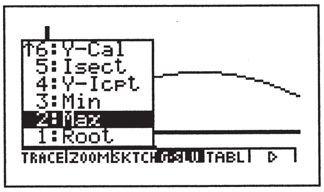
回帰グラフの式
$y=-0.04x^2+480x$



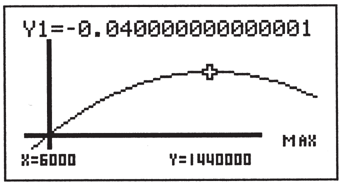
式にもとづいたグラフ



拡大（zoom out）



G-SLV機能で
MAX（最大値）選択



頂点の座標
（6000，1440000）

チケットプライスと売上げの関係を表したグラフの頂点は（6000，1440000）で，この点を境にして，チケットプライスが高くなると売上げは減少することがわかります。

このように，グラフ電卓を用いて調べることにより，チケットプライスを 6000 円のときの売上げは 1440000 円で，この金額がもっとも大きいことがわかります。

x と y の関係を表した式 $y=-0.04x^2+480x$ を変形することによって，もっとも多くの売上げが得られるチケットプライスと，そのときの売上げを求める方法を考えてみましょう。

$y=-0.04x^2+480x$ の式を，次のようにして変形してみましょう。

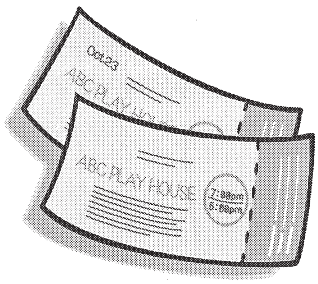
$$
\begin{aligned}
y &= -0.04x^2+480x \\
&= -0.04(x^2-12000x) \\
&= -0.04(x^2-2\times 6000x+6000^2)+6000^2\times 0.04 \\
&= -0.04(x-6000)^2+1440000
\end{aligned}
$$

−0. 04 でくくる。

かっこの中を平方完成する。

上に示したように変形すると，$x=6000$ のときに $y=144000$ となり，これが y の最大値であることがわかります。この値は，グラフの頂点の座標になっています。このように，平方完成することにより，グラフの頂点の座標がわかります。

イベント会社の田中さんは，少しでも多くの人にコンサートを楽しんでほしいという願いもあります。売上げが多少減っても購入者が多いほうがいいなと考えた田中さんは，売上げは 1350000 円あれば十分だと判断しました。

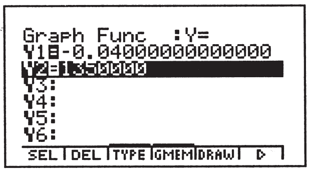


さて，売上げが 1350000 円になるようにするためには，チケットプライスをいくらにすればよいのでしょうか。

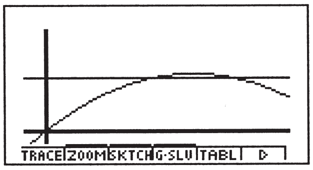
まず，グラフを使って考えてみましょう。

グラフで考えるときには，チケットプライスと売上げの関係を表した放物線のグラフと，定数関数 $y=1350000$ のグラフとの交点の座標を求めることによって判断できます。

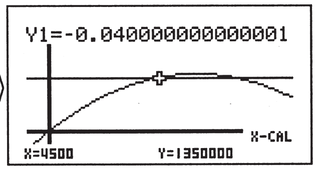
収益金が 1350000 円になるようにするには



定数関数
$y = 135000$ を入力



2つのグラフをかく



交点の座標を求める

上で調べたように，グラフの交点は2か所ありますが，チケットプライスを安くしたいということなので，xの値が小さいほうが求める答えです。

グラフ電卓を用いて調べることにより，チケットプライスを 4500 円とした場合，売上げは 1350000 円になることがわかります。また，このときのチケット購入者数は，1350000÷4500＝300 より，300 人になることもわかります。

▶▶次に，式を使って求めてみましょう。

売上げが 1350000 円になることを式に表すと

$$1350000 = -0.04x^2 + 480x$$

となります。この式は，次のように変形できます。

$$0.04x^2 - 480x + 1350000 = 0$$

このように，(2 次式)=0 という形になる方程式を **2 次方程式**といいます。また，2 次方程式を成り立たせる文字の値を 2 次方程式の**解**，解をすべて求めることを，**2 次方程式を解く**といいます。

2 次方程式 $0.04x^2 - 480x + 1350000 = 0$ の解は，グラフ電卓を使ってグラフをかくことによって求めることはできましたが，この 2 次方程式は，次のように計算によっても解を求めることができます。

$\boxed{1}$ 両辺を25倍して，x^2 の係数を1にする。

$\boxed{2}$ 左辺を因数分解する。

$\boxed{3}$ 因数の積が0なので，そのいずれかが0であることから，解を求める。

$AB=0$ ならば $A=0$ または $B=0$

$$0.04x^2-480x+1350000=0$$
両辺を25倍する。
$$x^2-12000x+33750000=0$$
因数分解する。
$$(x-4500)(x-7500)=0$$
解を求める。
$$x-4500=0 \quad \text{または} \quad x-7500=0$$
したがって　$x=4500$　または　$x=7500$

解は4500　または 7500 となりますが，安いほうが答として適切なので，チケットプライスは4500円という結果になります。グラフ電卓を使って求めた結果と同じになります。

問　1　次の2次方程式を，計算によって解きなさい。

① $(x+7)(x-2)=0$　　② $x^2+2x-24=0$

③ $x^2+7x=0$　　④ $x^2-4x+4=0$

因数分解できない2次方程式は，次のように解きます。

例　1　$x^2+6x-5=0$ は次のようにして解くことができます。

$$x^2+6x-5=0$$
$$(x^2+6x+9)-9-5=0$$
$$(x+3)^2-14=0$$
$$(x+3)^2=14$$
$$x+3=\pm\sqrt{14}$$
$$x=-3\pm\sqrt{14}$$

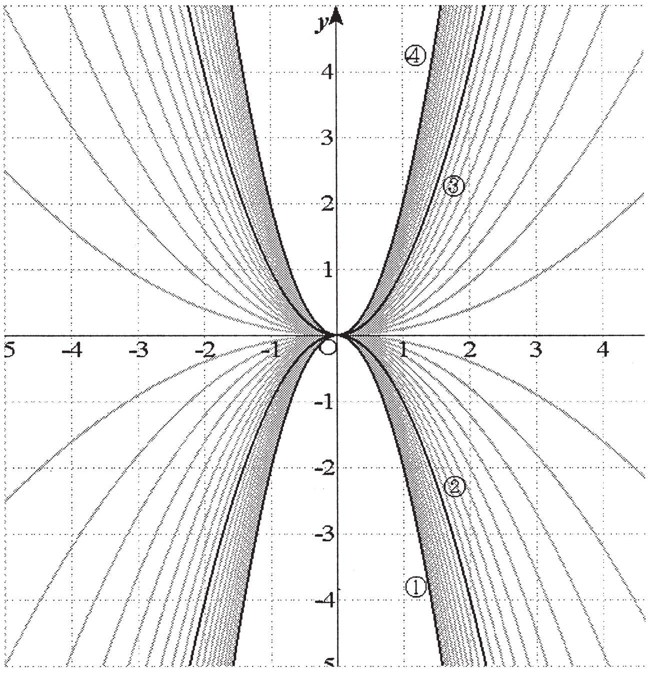
問　2　2次方程式　$x^2-2x-6=0$ を解きなさい。

3　放水の数学

右の写真は，花子さんが花壇に水をまいているところを写したものです。水をまくときの水の軌跡は放物線になります。ということは，水の軌跡は2次関数の式で表現できるはずです。

このことを考えるために，2 次関数の式とグラフの関係を，いろいろな見方で調べてみましょう。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ において，$b=0$，$c=0$ とした $y=ax^2$ を考えてみます。



$y=ax^2$ は，y が x^2 の定数倍(a 倍)なので，**y は x^2 に比例する関数**とみることができます。

右のグラフは，それぞれ次の関数のグラフです。

① $y=-2x^2$ $(a=-2)$
② $y=-x^2$ $(a=-1)$
③ $y=x^2$ $(a=1)$
④ $y=2x^2$ $(a=2)$

問　1　グラフ電卓を使って，a の値を $-2\leqq a\leqq 2$ の範囲で 0.1 ずつ変えてグラフをかき，グラフの変化を観察しなさい。

■ $y=-x^2+bx$ のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ において，$a=-1$，$c=0$ とした $y=-x^2+bx$ のグラフを考えてみましょう。

水をまくと，水は下に落ちます。だから，下向きの放物線で考えられるように，a の値を負の数（ここでは−1）に設定します。

$y=-x^2+bx$ は $y=ax^2$（2 乗に比例する関数）と $y=bx$（比例）を合わせた関数とみることができます。

右のグラフは，それぞれ次の関数のグラフです。

① $y=-x^2-2x$

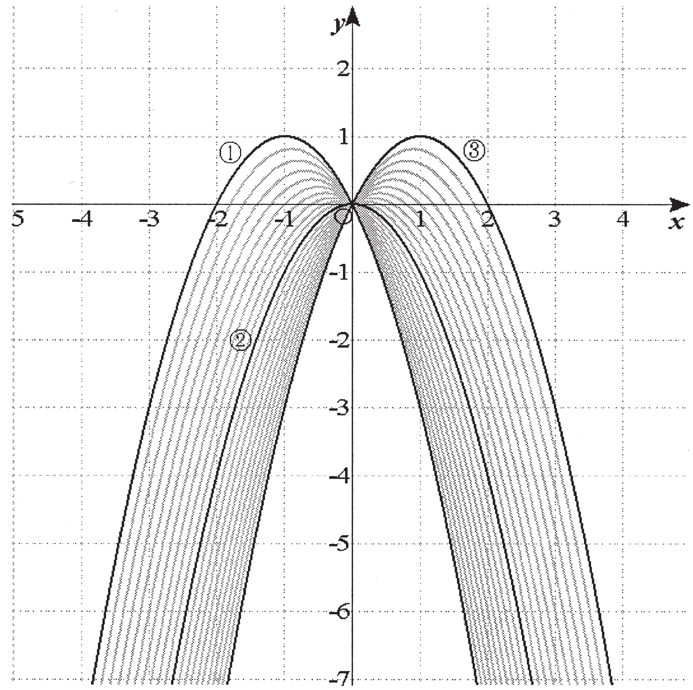
　$(b=-2)$

② $y=-x^2$

　$(b=0)$

③ $y=-x^2+2x$

　$(b=2)$



問 2　グラフ電卓を使って，b の値を $-2\leqq a\leqq 2$ の範囲で 0.2 ずつ変えてグラフをかき，グラフの変化を観察しなさい。

■ $y=-x^2+c$ のグラフ

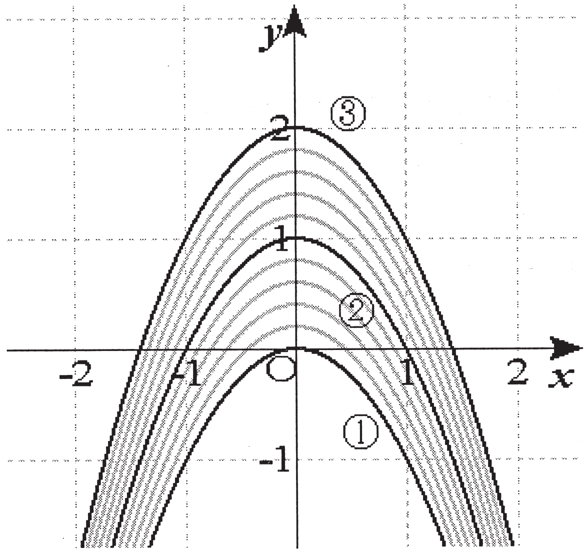
$y=ax^2+bx+c$ において，$a=-1$，$b=0$ とした $y=-x^2+c$ のグラフを考えてみましょう。

右のグラフは，それぞれ次の関数のグラフです。

① $y=-x^2$ $(c=0)$

② $y=-x^2+1$ $(c=1)$

③ $y=-x^2+2$ $(c=2)$



問 3 グラフ電卓を使って，c の値を $-2 \leqq c \leqq 2$ の範囲で 0.2 ずつ変えてグラフをかき，グラフの変化を観察しなさい。

これまで調べたことをまとめると，次のことがわかります。

$y=ax^2+bx+c$ （a，b，c は定数）について

1 a の値によって，グラフの開き具合が変わる。

$a<0$ では下に開く。（上に凸の放物線）

$a>0$ では上に開く。（下に凸の放物線）

2 b の値によって，対称軸の位置が変わる。

$a<0$ では，b の値が大きくなると対称軸は右に動く。

$a>0$ では，b の値が大きくなると対称軸は左に動く。

3 c の値によって，放物線が縦に平行移動する。

c の値が小さくなると放物線は下に下がる。

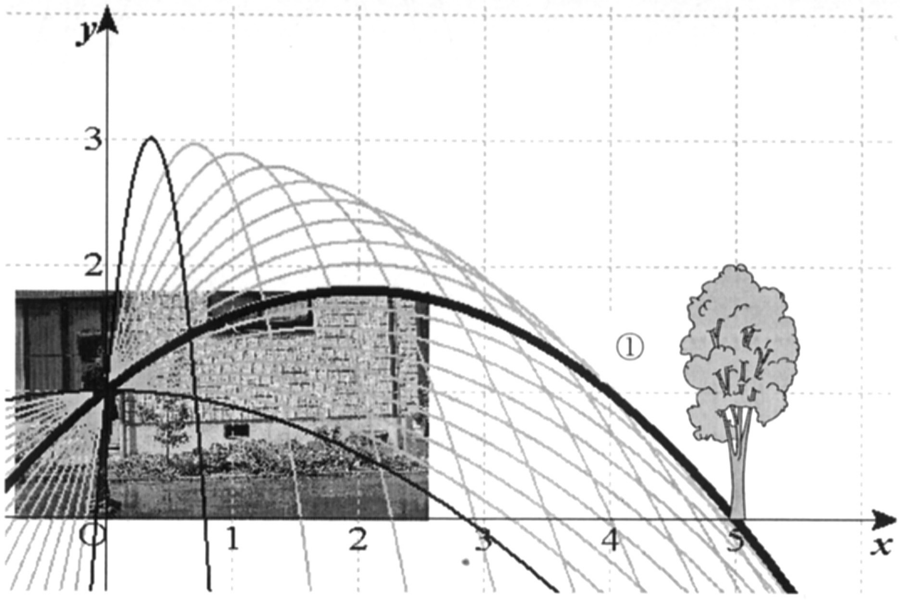
c の値が大きくなると放物線は上に上がる。

■放水の数学

ホースで水をまく場合，ホースの口を上へ向ければ向けるほど遠くまで水が届くとはかぎりません。これは，水にも重さがあり，重力によって下に引っ張られるからです。

水をまくときの水の軌跡を式で表すには，水が出る勢い，ホースの口を向ける角度に加え，重力も考えなければなりません。このことを考えて式に表すことは，現段階では難しいでしょう。ただし，実際の生活場面から問題として考えてみることはできそうです。

いま，花子さんは5m 先にある植木の根元に水をあげようとしています。このとき，水の軌跡について調べてみました。



上の①のグラフの式は

$$\text{およそ}\quad y = -0.2x^2 + 0.8x + 1$$

となります。この放物線について考えてみましょう。

花子さんから 5m はなれたところにある植木の根元に水が届くということは，$y=-0.2x^2+0.8x+1$ の式で，$y=0$ のときに $x=5$ になるということです。つまり，次の等式をみたす x の値が 5 だということです。

$$-0.2x^2+0.8x+1=0$$

問 4 $-0.2x^2+0.8x+1=0$ が，$x=5$ のとき成り立つことを確かめなさい。

▶▶ $-0.2x^2+0.8x+1=0$ をみたす x の値がほかにもないか，調べてみましょう。

$-0.2x^2+0.8x+1=0$ をみたす x の値を求めるには，2 次方程式 $-0.2x^2+0.8x+1=0$ を解けばよい。この 2 次方程式は，「チケットプライスの数学」(p.56)で学習したことと同様に，因数分解を用いて解くことができます。

$-0.2x^2+0.8x+1=0$ を解いてみましょう。

$$-0.2x^2+0.8x+1=0$$

両辺を－5 倍する。

$$x^2-4x-5=0$$

因数分解する。

$$(x+1)(x-5)=0$$

$x+1=0$ または $x-5=0$

したがって $x=-1$ または $x=5$

2 次方程式 $-0.2x^2+0.8x+1=0$ の解は，$x=-1$ または $x=5$ の 2 つになります。グラフでは，x 軸との交点の座標が $x=-1$ と $x=5$ になります。

このことから，もし地面($y=0$)から水をまくとすると，花子さんが立っている位置(原点)より後ろに 1m 下がったところ($x=-1$)から水をまけばよいことがわかります。

■グラフの最大値

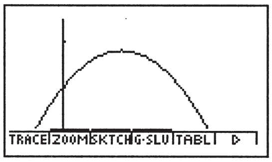
花子さんは，水をまきながら，いちばん高いところでどれくらいの高さがあるのか知りたくなりました。

$y=-0.2x^2+0.8x+1$　について，いちばん高いところの高さを求めるには，どうすればよいでしょうか。

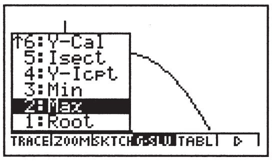
Q 60ページの$y=-0.2x^2+0.8x+1$ のグラフをみて，いちばん高いところの高さはどのくらいになるかを読み取ってみましょう。

$y=-0.2x^2+0.8x+1$ のグラフを観察すると，花子さんからおよそ2mはなれたあたりでいちばんも高く，高さは2mより少し低い程度だろうという予想がつきます。グラフに表すと，いろいろなことがわかります。しかし，正確なことはわかりません。

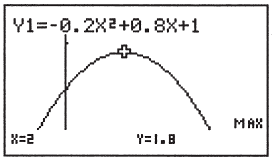
そこで，グラフ電卓を使って y の最大値を調べてみましょう。



$y=-0.2x^2+0.8x+1$ のグラフをかく



G-SLV機能でyの最大値を選択する



最大値の座標を読み取る
$(x, y)=(2, 1.8)$

y の最大値は，グラフ電卓を使ってグラフをかくことで求めることができました。この最大値は，次のような手順で，計算によっても求めることができます。

1. 右辺を平方完成する。
2. 平方の部分は0または正になることを根拠にして，最大値(最小値)を判断する。

問 5　上の手順で，$y=-0.2x^2+0.8x+1$ の y の最大値とそのときの x の値を求めなさい。

■2 次関数のグラフ

これまで，$y=ax^2+bx+c$ の特徴，グラフと x 軸との交点，最大値(最小値)の求め方について調べてきました。

これらのことをふり返りながら，いろいろな2次関数のグラフをかいてみましょう。

グラフとx軸との交点の座標を求めるには，2次方程式を解けばよい。そのとき，因数分解が必要となります。また，放物線の頂点は平方完成すればわかります。

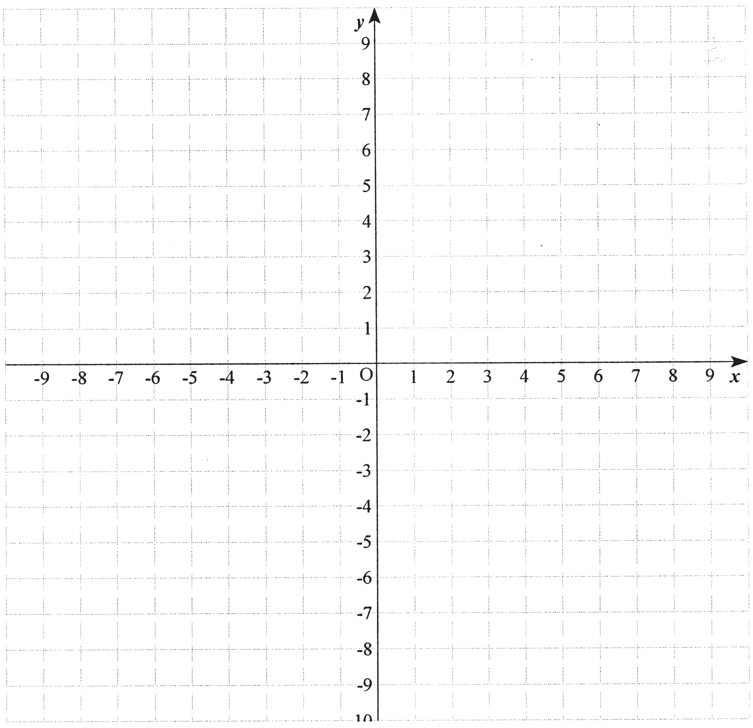
問 6 次の関数のグラフを，グラフ電卓を使わないでかきなさい。

① $y=x^2-9$　② $y=-x^2+4$

③ $y=2x^2-8$　④ $y=x^2+x$

⑤ $y=\frac{1}{2}x^2-3x$　⑥ $y=2x^2-4x-6$

⑦ $y=x^2+4x+3$　⑧ $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$



② いろいろな関数

1 いろいろな関数

Q あなたなら，下のどちらの方法でおこづかいをもらいますか。

A　毎月 1000 円ずつもらう。

B　最初の月は 1 円で，次の月から前の月の 2 倍の金額をもらう。

上の**Q**の A，B の方法について，x か月後のおこづかいの金額を y 円として，次の問を考え，どちらが得か調べてみましょう。

問 1　A の方法で，y は x の関数です。y を x の式で表しなさい。

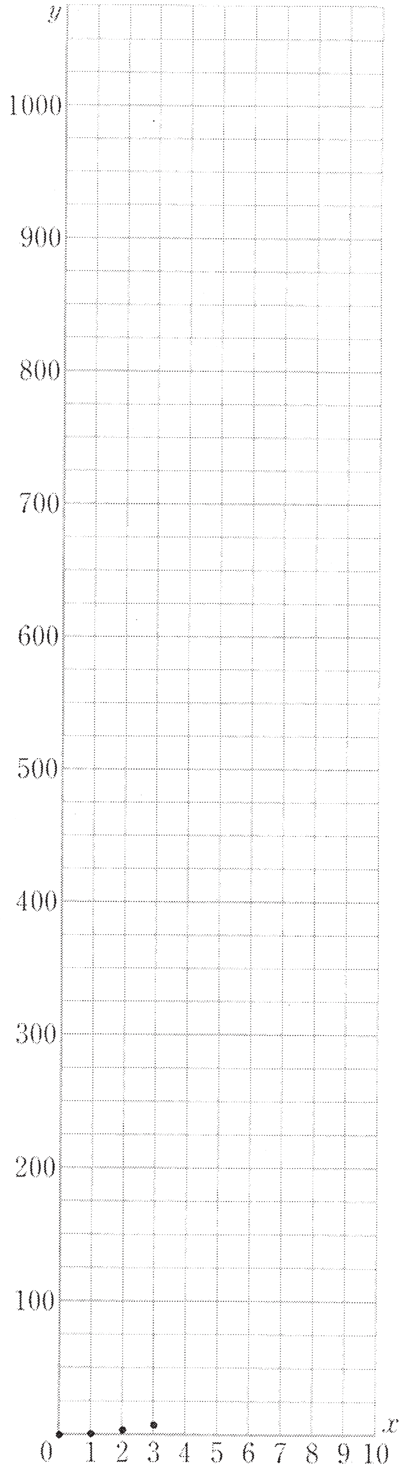
問 2　B の方法について，次の問に答えなさい。

① x の値が 1，2，…，10 のときの y の値をそれぞれ求めなさい。

② この関数のグラフを，右の図にかき入れなさい。

③ 15 か月後には，おこづかいはいくらになりますか。

④ y を x の式で表すとどうなりますか。



例　1　1000円の品物があり，毎年前の年の10%だけ値上がりします。

この品物の5年後の値段を求めてみましょう。

まず，ある年の値段を a 円とすれば，翌年の値段は

$$a+a\times 0.1=a(1+0.1)$$
$$=a\times 1.1 \quad (円)$$

と表されます。したがって

1年後の値段は　1000×1.1　(円)

2年後の値段は　$(1000\times 1.1)\times 1.1=1000\times 1.1^2$　(円)

3年後の値段は　$(1000\times 1.1^2)\times 1.1=1000\times 1.1^3$　(円)

となります。このように，x 年後の値段を y 円とすれば，値段は年数の関数です。つまり y は x の関数です。その式は次のように表されます。

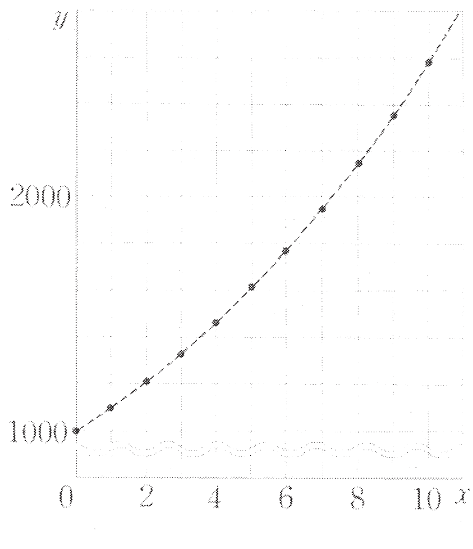
$$y=1000\times 1.1^x$$

したがって，5年後の値段は

$$y=1000\times 1.1^5=1610.51$$

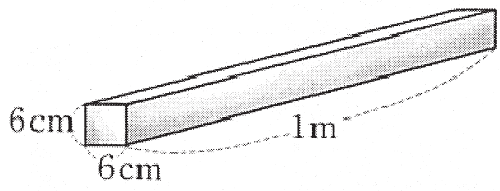
答　約1611円

この関数をグラフに表すと，下のようになります。



問　3　例1について，12年後，20年後の品物の値段を電卓で求めなさい。

Q 切り口が1辺6cmの正方形で，長さが1mの鉄の棒があります。これをとかして，切り口が1辺3cmの正方形の棒に作りなおすと，棒の長さは何mになるでしょうか。また，切り口の1辺を，12cm，2cm，1cm にすると，棒の長さはそれぞれ何mになるでしょうか。



上の鉄の棒で，切り口の1辺を$x$cm，棒の長さを$y$cmとすると，yはxの関数であり，xとyの関係は次の式で表されます。

$$y \times x^2 = 100 \times 6^2$$

したがって

$$y = \frac{3600}{x^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

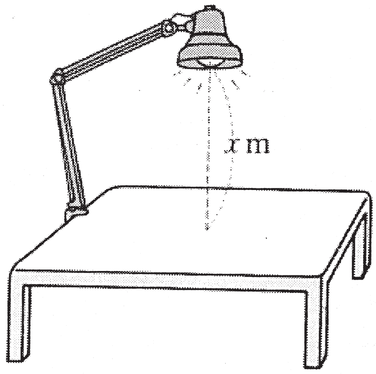
問 4 (1)の式のxにいろいろな値を代入して，それに対応するyの値を求め，下の表を完成させなさい。

x	1	2	3	4	5	6	……	12	……
y							……		……

$y = \frac{a}{x^2}$ のような式で表されるとき，yはxの**2乗に反比例する**といいます。

問 5 問4でつくった表で，xの値が2倍，3倍，4倍になると，対応するyの値はそれぞれ何倍になるかを調べ，yはxの2乗に反比例することを確認しなさい。

問 6 電灯に照らされている机の面の明るさは，ルクスという単位で表されます。机の面から電灯までの高さが xm のときの面の明るさを y ルクスとすると，y は x の 2 乗に反比例します。$x=1.5$ のときの面の明るさが 120 ルクスでした。



① y を x の式で表しなさい。

② $x=0.3$，$x=0.6$ のときの面の明るさを求めなさい。

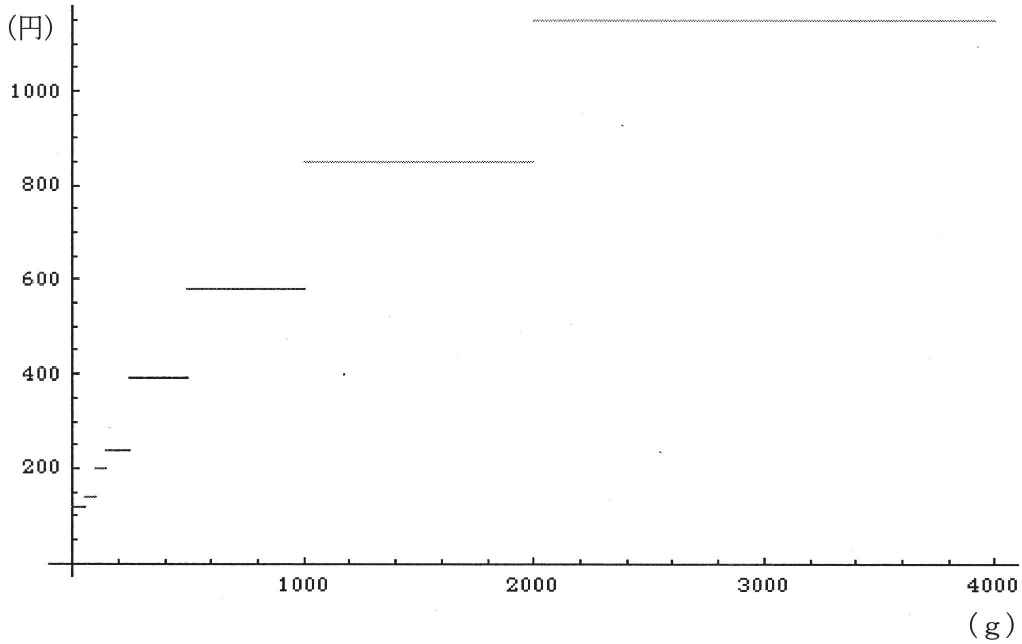
▶▶$y=\dfrac{a}{x^2}$ のグラフについて考えてみましょう。

問 7 $y=\dfrac{1}{x^2}$ のグラフはどんなグラフになるか，グラフ電卓を使ってかいてみなさい。また，$y=\dfrac{a}{x^2}$ として，a にいろいろな値を代入し，グラフがどんなふうに変化するか調べてみなさい。

例 2 定形外の封筒で郵便物を送るときは，4kg 以下のものにかぎられています。 下の表とグラフは，その重さと料金を示したもので，x g の料金を y 円とすれば，料金は郵便物の重さの関数です。

＜定形外郵便物＞

50g まで	120 円
100g まで	140 円
150g まで	200 円
250g まで	240 円
500g まで	390 円
1kg まで	580 円
2kg まで	850 円
4kg まで	1,150 円

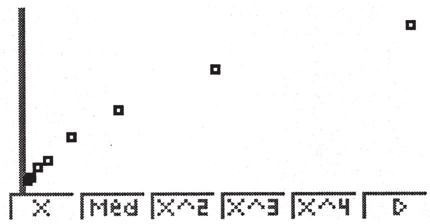


上の例の関数のように，y がとびとびの値をとる関数もあります。

問 8 例 2 の関数で，x の変域は $0<x\leqq4000$ です。y のとり得る値をすべていいなさい。

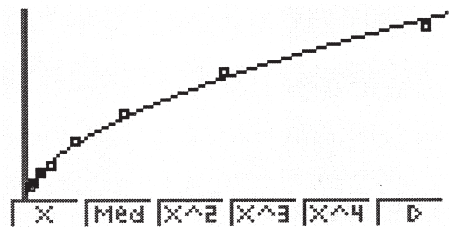
前ページの例２のとびとびのグラフで，それぞれの x の変域でのいちばん後ろの値とそのときの y の値は，次の表のようになります。また，右のグラフは，これらの点をグラフ電卓で散布図にプロットしたものです。

x	y
50	120
100	140
150	200
250	240
500	390
1000	580
2000	850
4000	1,150

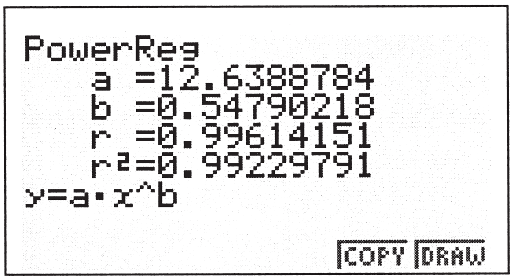


この散布図を回帰してみましょう。どんな関数がいちばんぴったりあてはまるでしょうか。

いろいろな関数で近似してみましょう。



グラフ電卓の pwr というボタンを押すと，もっともあてはまるグラフの式を求めることができます。

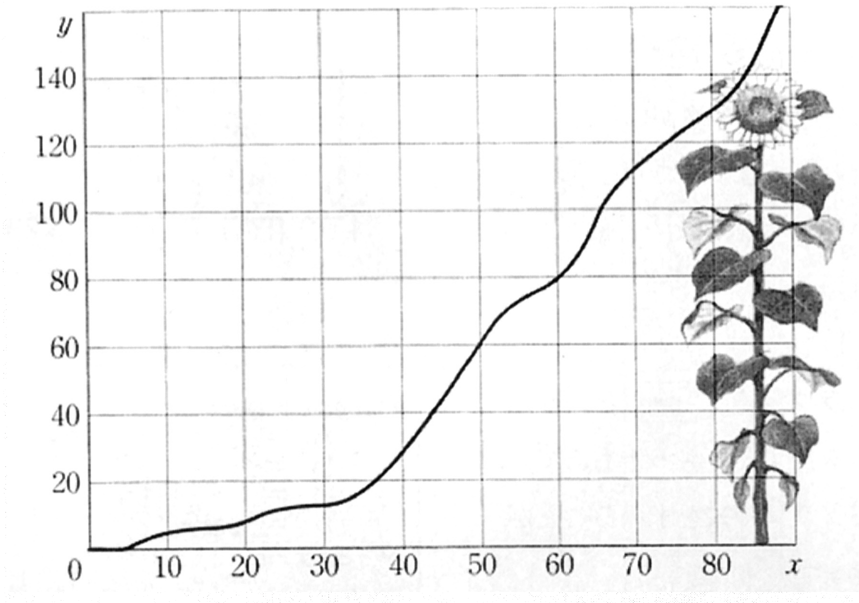


この関数は，次のように表される関数で，**べき関数**といいます。

$$y = 12.64 \times x^{0.55}$$

問　9　例２で，さらに 4kg 以上の郵便物に料金を設定するとしたら，どのような重さをどのくらいの料金にすればよいですか。

例 3 下の図は，あるひまわりの成長の記録をグラフに表したものです。種をまいた日から x 日目のひまわりの高さを $y$cm とすると，y は x の簡単な式で表すことはできません。
しかし，x の値を決めるとそれにつれて y の値も決まりますから，y は x の関数であるということができます。
ひまわりの高さは，種をまいてからの日数の関数です。



▶▶関数とはいったい何でしょうか。

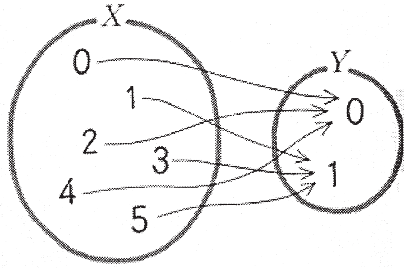
「y は x を 2 でわったときのあまりに等しい」という関係を考えてみましょう。この関係では，x の変域が

$X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

のとき，y の変域は

$Y=\{0,\ 1\}$

で，右の図のように，Xのおのおのの要素に Yの要素が 1 つだけ対応しています。このような対応を，**一意対応**といいます。



例 4　前ページの例 3 では，種をまいた日から何日たったかが特定できれば，それにともなってひまわりの高さは，必ずただ 1 つに決まります。したがって，種をまいた日からの日数とひまわりの高さは一意対応しています。

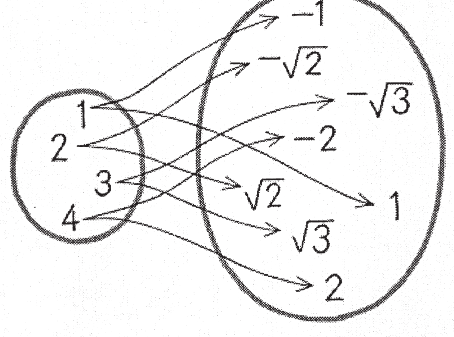
Xの集合と Yの集合の要素どうしが一意対応であるとき，**y は x の関数**であるといいます。

次に，関数による対応とはいえない例について考えてみましょう。

Q　1 の平方根を求めなさい。また，2 の平方根を求めなさい。

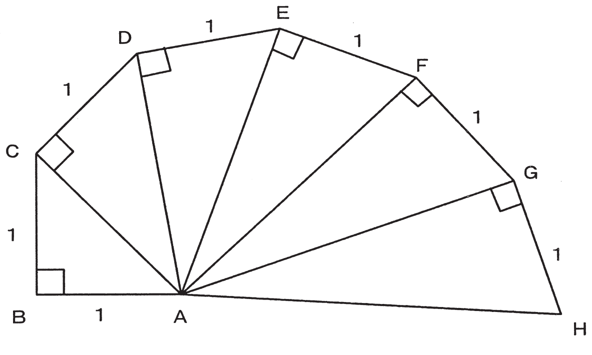
例 5　x の変域が $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ のとき，「y は x の平方根である。」という関係について考えてみましょう。

この対応のようすを図で表すと右の図のようになります。この対応では，x の 1 つの値に y の値が 1 つだけ対応しているわけではありません。したがって，y は x の関数ではありません。



第4単元

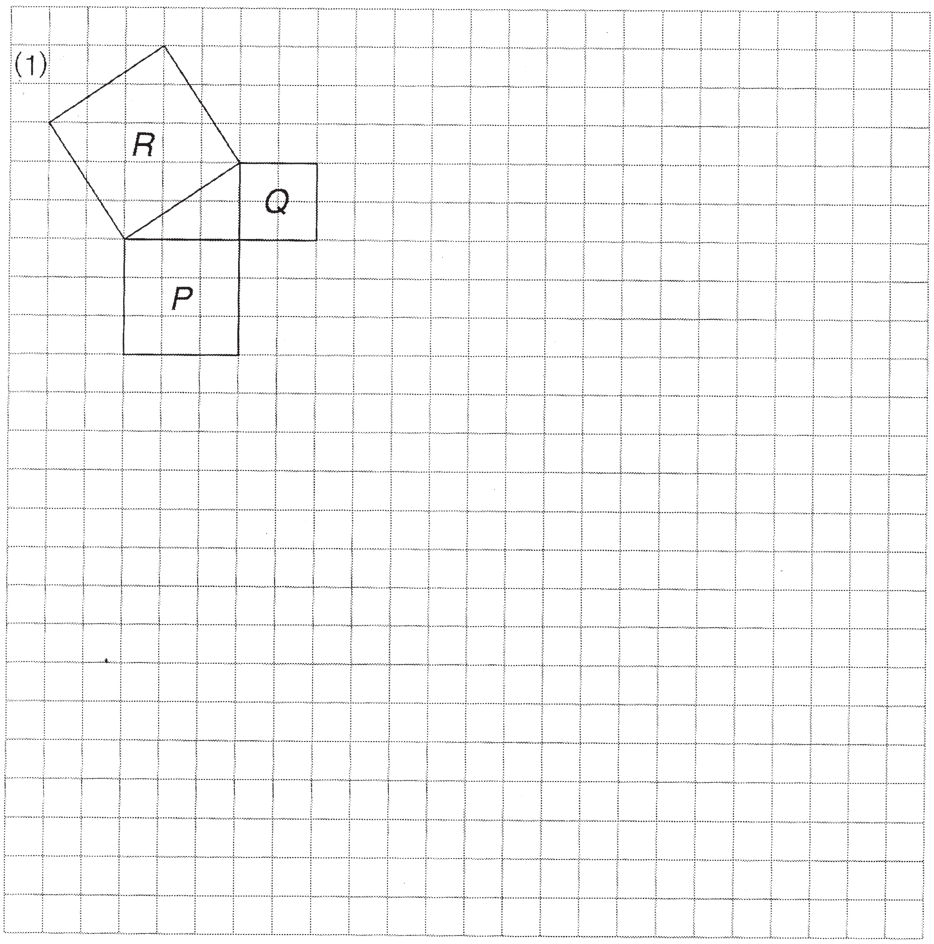
三平方の定理



① 三平方の定理

1 三平方の定理

Q 下の図は，直角三角形の外側に，それぞれの辺を 1 辺とする正方形をかいたものです。



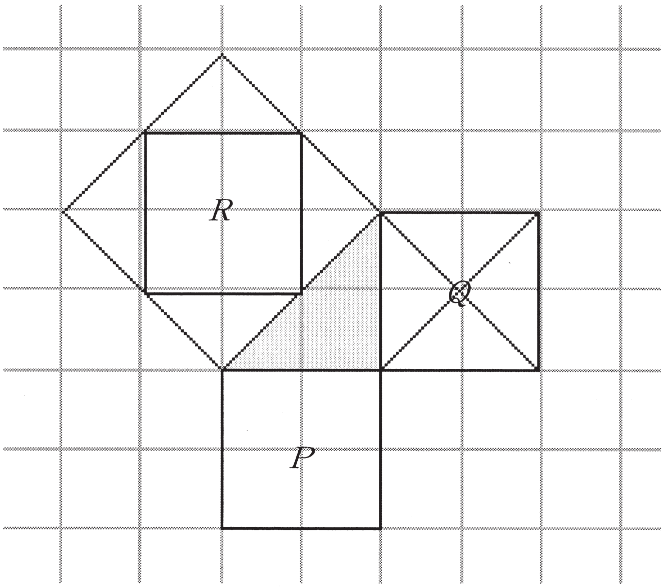
① (1)の図で，3 つの正方形の面積 P, Q , R の値を求め，下の表に書き入れましょう。

	P	Q	R.
(1)			

② 直角三角形の辺の長さを変えて，(1)と同じような図をかき，3 つの正方形の面積を求めてみましょう。

③ これまでに調べたことから，3 つの正方形の面積の間にはどんな関係が成り立つと予想できますか。

④ ③で考えた予想を，下の場合で確かめてみましょう。



右の図のように，それぞれの正方形の面積を P, Q , R で表すと，前ページで調べたことから

$$P+Q=R \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

が成り立つことが予想されます。

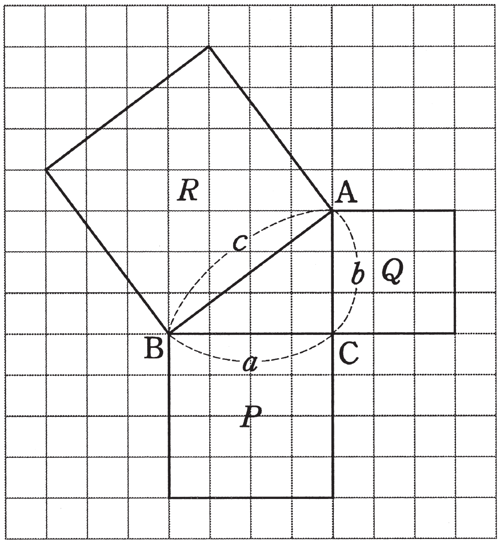
直角三角形の辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a, b, c とすると

$$P=a^2,\ Q=b^2,\ R=c^2$$

ですから，(1)の式は

$$a^2+b^2=c^2$$

と，辺の長さの関係の式におきかえることができます。



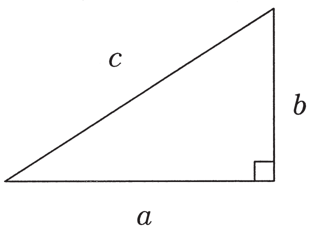
問 1　上の図で，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを確かめなさい。

上で調べた関係は，どんな直角三角形についても成り立ちます。

●三平方の定理●

定理　直角三角形の直角をはさむ 2 辺の長さを a, b, 斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$a^2+b^2=c^2$$

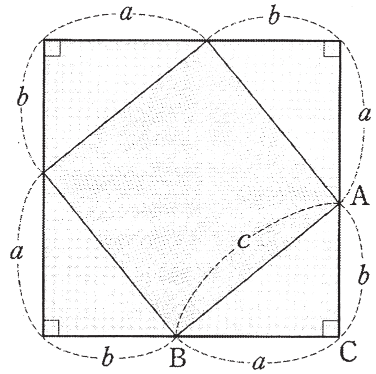


上の定理を**三平方の定理**といいます。この定理は，古代エジプトの時代から知られていましたが，ギリシャの数学者ピタゴラス（紀元前 572 年頃～紀元前 492 年頃）にちなんで「**ピタゴラスの定理**」ともよばれています。

▶▶三平方の定理を証明してみましょう。

<証明>

3 辺の長さが a, b, c で，$\angle C=90°$ の直角三角形 ABC と合同な直角三角形を，1 辺が c である正方形のまわりに，右の図のようにかくと，外側には，1 辺が $a+b$ の正方形ができます。



面積の関係は

(1 辺が c の正方形の面積)

＝(外側の正方形の面積)－(△ABC の面積)×4

となりますから

$$c^2=(a+b)^2-\frac{1}{2}ab\times 4$$

$$=(a^2+2ab+b^2)-2ab$$

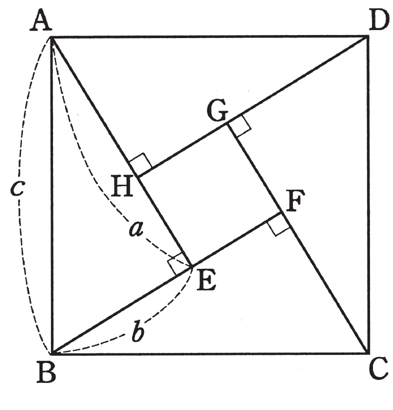
$$=a^2+b^2$$

したがって　　$a^2+b^2=c^2$

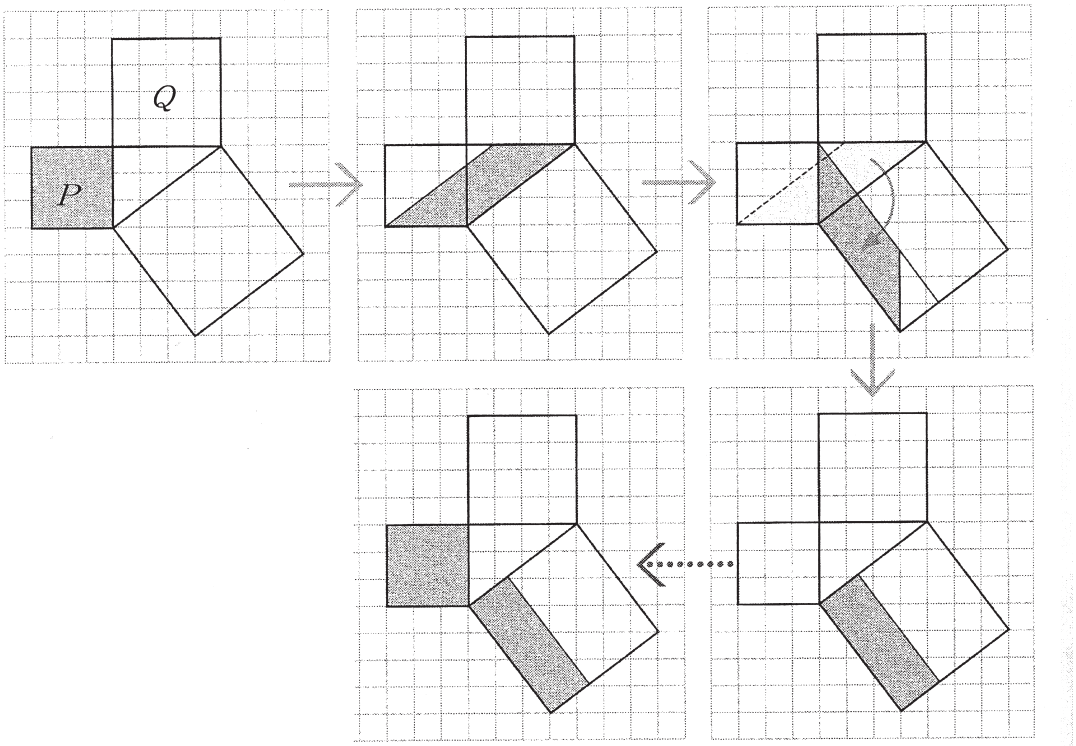
三平方の定理の証明は，いろいろな方法が考えられています。

問 2　$\angle E=90°$ の直角三角形 ABE と合同な直角三角形を，右の図のように並べます。

このとき，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを証明しなさい。



問　3　下の図は，三平方の定理を証明しているものです。どのように説明しようとしていますか。Q の正方形についても，P の場合と同様に説明し，三平方の定理が成り立つことを示しなさい。



問　4　直角三角形 ABC の直角の頂点 C から斜辺 AB へ垂線 CD をひき

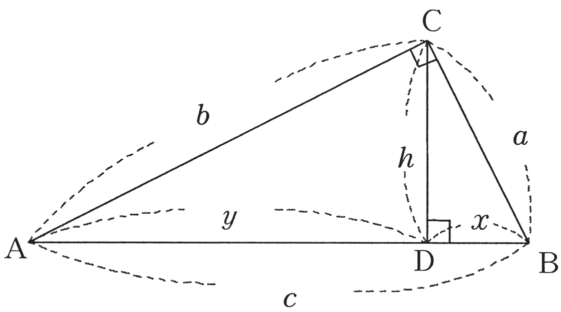
BC$=a$，AC$=b$，

AB$=c$，BD$=x$，

AD$=y$，CD$=h$

とします。

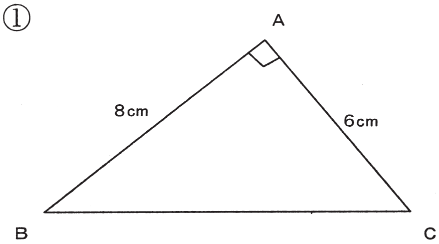
これを利用して，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを証明しなさい。



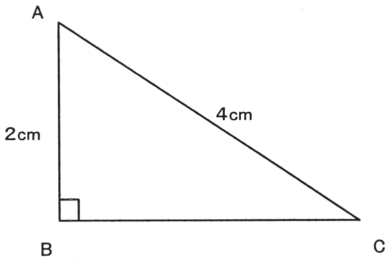
▶▶三平方の定理を使って，直角三角形の辺の長さを求めてみましょう。

例 1 下の直角三角形で，辺 BC の長さをそれぞれ求めなさい。

①



②



＜解答＞ どちらも BC＝x cm とします。

① BC は斜辺であるから

$$8^2+6^2=x^2$$

$$x^2=100$$

$x>0$ であるから

$$x=10$$

<u>答 10cm</u>

② 斜辺が 4cm であるから

$$2^2+x^2=4^2$$

$$x^2=12$$

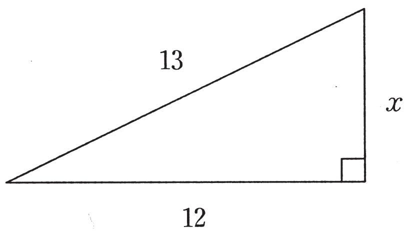
$x>0$ であるから

$$x=2\sqrt{3}$$

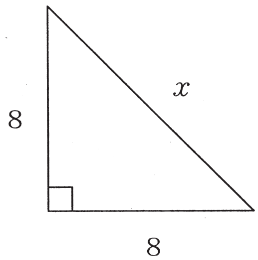
<u>答 $2\sqrt{3}$ cm</u>

問 5 下の図で，x の値を求めなさい。

①

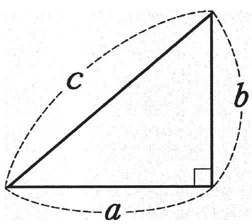


②



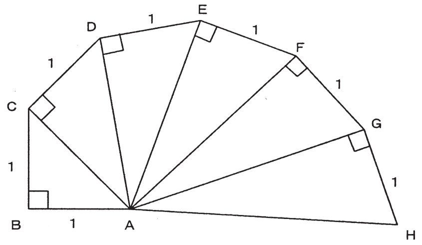
問 6 直角三角形の，直角をはさむ 2 辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とします。下の表の空らんにあてはまる数を求めなさい。

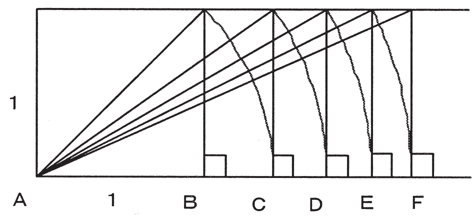
	a	b	c
①	3	4	
②		5	7
③	24		25



やってみよう！　平方根の長さ

下の図は，AB＝1として，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ の長さの線分AC，AD，……を順にかいていく方法を示したものです。





➲➲上のようにしてかいてみましょう。

➲➲AC，AD，…の長さが $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，…になるわけを考えてみましょう。

2　三平方の定理の逆

Q　3 辺が，AB＝5cm，BC＝4cm，CA＝3cm の △ABC をかいてみましょう。△ABC はどんな三角形になるでしょうか。

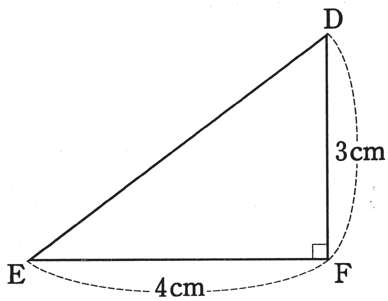
上の**Q**でかいた △ABC では，3 辺の長さの間に $3^2+4^2=5^2$ の関係が成り立っています。この三角形が直角三角形になるかどうかを調べてみましょう。

このことを調べるには

EF＝4cm，FD＝3cm，

∠F＝90°

の直角三角形 DEF をかき，これが △ABC と合同であるかどうかを考えればよい。



問　1　次の問に答えなさい。

① 上の直角三角形 DEF で，辺 DE の長さは何 cm ですか。

② △ABC≡△DEF を示しなさい。

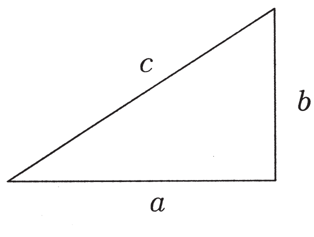
上の問から∠C＝90° がいえ，△ABC は直角三角形となることがわかります。一般に，次の定理が成り立ちます。

●三平方の定理の逆●

定理　三角形の 3 辺の長さ a，b，c の間に

$$a^2+b^2=c^2$$

という関係が成り立てば，その三角形は，長さ c の辺を斜辺とする直角三角形である。



➲➲辺の長さをくふうして，運動場に大きな直角三角形をかいてみましょう。

▶▶三平方の定理の逆を利用して，3 辺の長さがわかっている三角形が直角三角形であるかどうかを調べてみましょう。

例 1 3 辺の長さが 8，15，17 である三角形は，直角三角形であるといってよいですか。

<考え方> 3 辺の長さ a，b，c の間に，$a^2+b^2=c^2$ の関係が成り立つかどうかを調べればよい。このとき，もっとも長い辺を c として計算します。

<解答> $a=8$，$b=15$，$c=17$ として考えます。

$$a^2+b^2=8^2+15^2=64+225=289$$

$$c^2=17^2=289$$

したがって，$8^2+15^2=17^2$ という関係があります。

すなわち，$a^2+b^2=c^2$ という関係が成り立っています。

答 直角三角形といってよい。

問 2 次の長さを 3 辺とする三角形 ㋐～㋓のうち，直角三角形はどれですか。

㋐ 29cm，21cm，20cm

㋑ 9cm，16cm，18cm

㋒ $\sqrt{7}$ cm，$\sqrt{11}$ cm，$3\sqrt{2}$ cm，

㋓ 3cm，$\frac{40}{3}$ cm，$\frac{41}{3}$ cm

問 3 三角形の 3 辺 a，b，c が次の式で表されています。

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2$$

ただし，$m>n>0$ です。

① この三角形は直角三角形であることを証明しなさい。

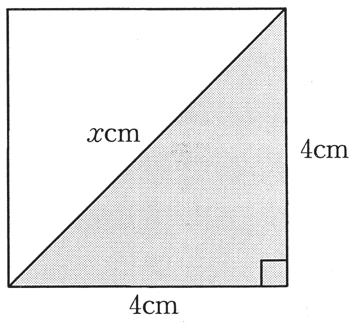
② 上のことを利用して，3 辺の長さが整数で表される直角三角形の例を 3 つあげなさい。

② 三平方の定理の応用

1 平面図形への応用

■四角形への応用

例 1 1辺が 4cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。



＜図1＞

＜考え方＞ 次に示す2通りの方法で求めてみます。

1 平方根のところでやったように，1辺が x cm の正方形を図2のようにかいて，面積から x を求める。

2 三平方の定理を利用して求める。

＜解答＞ 1 1辺が x cm の正方形をかくと，その正方形の面積は

$$8\times4=32 \quad (\text{cm}^2)$$

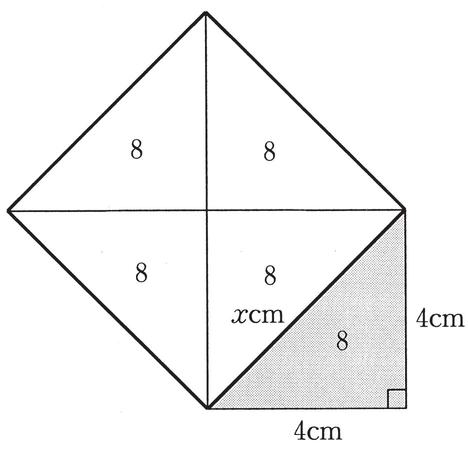
平方根の考えを用いると

$$x^2=32$$

$x>0$ であるから

$$x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

答 $4\sqrt{2}$ cm



＜図2＞

2 図1で，三平方の定理を使うと

$$x^2=4^2+4^2=32$$

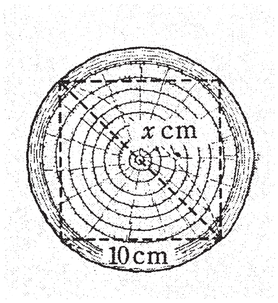
$x>0$ であるから

$$x=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$

答 $4\sqrt{2}$ cm

問　1　1 辺が 7cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。

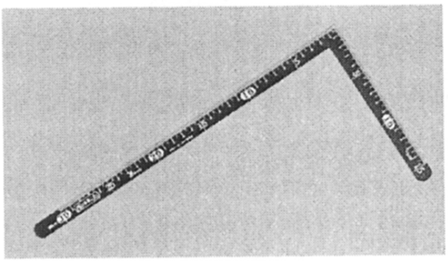
問　2　丸太から 10cm 角の柱を切りとるには，丸太の直径は少なくとも何 cm あればよいですか。



問　3　対角線の長さが d である正方形の 1 辺の長さを求めなさい。

問　4　切り口の円の直径が 30cm の材木からは，最大で約何 cm 角の柱がとれますか。

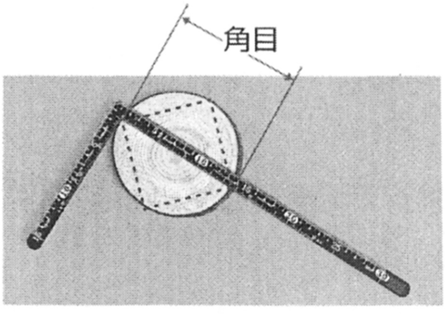
「さしがね」とよばれる右の写真のような大工道具があります。



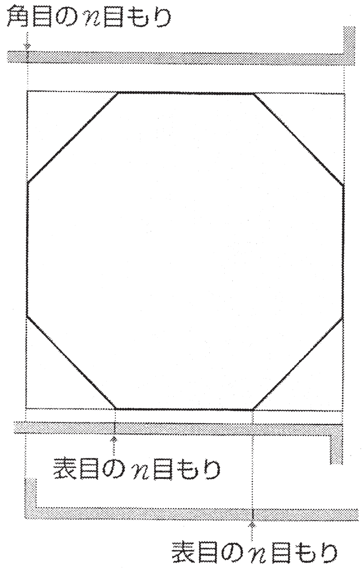
さしがねの裏には，表の目もり(表目)を $\sqrt{2}$ 倍にした目もり(角目)がついています。

表目と角目を使うと，上の問のような丸太からとれる角材の 1 辺の長さがわかります。

丸太の直径を角目ではかり，その目もりの分だけ表目ではかった長さが，丸太からとれる角材の 1 辺の長さになります。



また,「さしがね」を使って,次のようにして,正八角形をかくことができます。



1 角目を使って正方形をかきます。

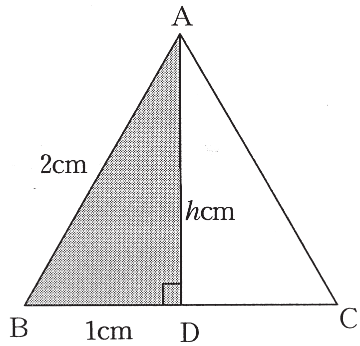
2 各辺の両端からそれぞれ,表目で,正方形の1辺の長さの目もりの分だけ長さをはかり,印をつけます。

3 印を右のように結びます。

問 5 上の方法で正八角形がかけるわけを考えなさい。

■三角形への応用

例 2 1辺が2cmの正三角形ABCの面積を求めなさい。



＜考え方＞ 正三角形 ABC の面積を求めるには,まず高さを求める必要があります。右の図のように,点 A から辺 BC にひいた垂線とBCとの交点をDとすると,DはBCの中点となります。
直角三角形ABDで三平方の定理を利用して,まず正三角形ABCの高さを求め,それから面積を求めます。

＜解答＞ AD$=h$cmとすると,BD$=1$cmであるから

$$1^2+h^2=2^2$$

したがって　　　$h^2=3$

$h>0$であるから　　$h=\sqrt{3}$

したがって,面積は

$$2\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\sqrt{3}$$

答　$\sqrt{3}$ cm^2

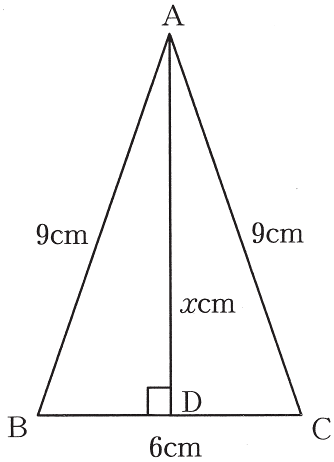
問　6　1 辺が 6cm の正三角形の面積を求めなさい。

問　7　1 辺の長さが a である正三角形について，次の問に答えなさい。

①　高さを，a を使って表しなさい。

②　面積を S とするとき，$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ であることを示しなさい。

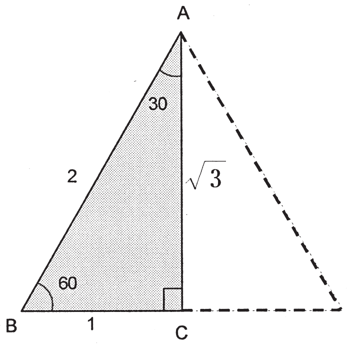
問　8　右の図の二等辺三角形 ABC の高さ AD と面積を求めなさい。



3 つの角が 90°，30°，60° である直角三角形と，90°，45°，45° である直角三角形の 3 辺の長さの間には，次のような関係が成り立っています。

●特別な直角三角形の３辺の比●

1 正三角形の高さ

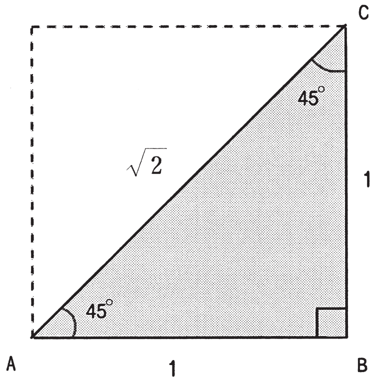


角の比　$30^\circ : 60^\circ : 90^\circ$

$= 1 : 2 : 3$

辺の比　$1 : 2 : \sqrt{3}$

2 正方形の対角線



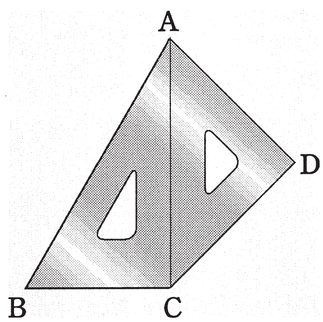
角の比　$45^\circ : 45^\circ : 90^\circ$

$= 1 : 1 : 2$

辺の比　$1 : 1 : \sqrt{2}$

問 9　1 組の三角定規では，辺の長さの関係は右のようになっています。

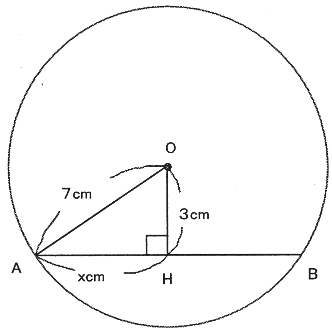
AC＝10cm のとき，三角定規の残りの辺の長さを求めなさい。



■円への応用

三平方の定理を利用して，弦や接線の長さを求めてみましょう。

例 3 半径が7cmの円Oで，中心からの距離が3cmである弦ABの長さを求めなさい。



〈考え方〉 右の図のように，円Oの中心から弦ABにひいた垂線とABとの交点をHとすると，Hは弦ABの中点で，OH＝3cmです。

〈解答〉 上の図で，AH＝x cmとすると，△OAHは直角三角形であるから

$$x^2+3^2=7^2$$

$$x^2=40$$

$x>0$であるから　　$x=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

弦ABの長さはAHの2倍であるから

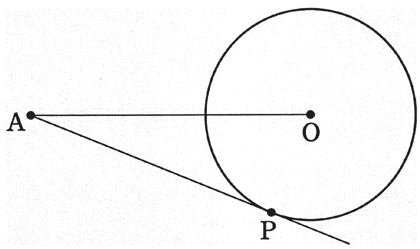
$AB=2\times2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$　　　　答　$4\sqrt{10}$ cm

問 10 半径が8cmの円Oで，弦ABの長さが12cmのとき，円の中心と弦ABとの距離を求めなさい。

問 11 右の図で，APはPを接点とする円Oの接線です。

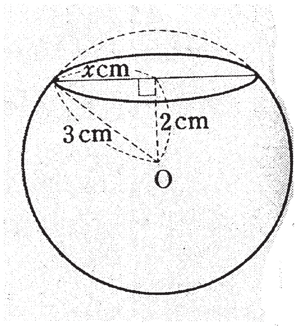
① 半径OPをひくと，△APOは直角三角形になります。このわけをいいなさい。

② 円Oの半径を4cm，線分OAの長さを14cmとするとき，線分APの長さを求めなさい。



■球の切り口の面積

例 4 半径 3cm の球を，中心から 2cm の距離にある平面で切ったときの切り口の円の半径を求めなさい。



<解答> 切り口の円の半径を x cm とすると

$$x^2+2^2=3^2$$

$$x^2=5$$

$x>0$ であるから　　$x=\sqrt{5}$

答　$\sqrt{5}$ cm

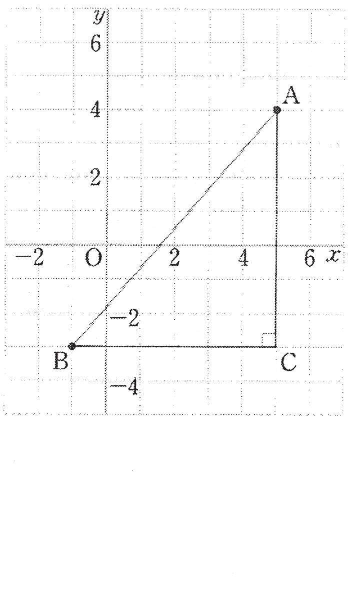
問 12 半径 r の球を，中心から d の距離にある平面で切ったとき，切り口の円の面積を求めなさい。ただし，$d<r$ であるとします。

■２点間の距離

2 点の座標がわかれば，三平方の定理を利用して，その 2 点間の距離を求めることができます。

例 5 2 点 A(5，4)，B(−1，−3) の間の距離を求めなさい。

<考え方> AB を斜辺として，他の 2 辺が座標軸に平行な直角三角形をつくります。



<解答> 右の図のように，直角三角形 ABC をつくります。

$$BC=5-(-1)=6$$

$$AC=4-(-3)=7$$

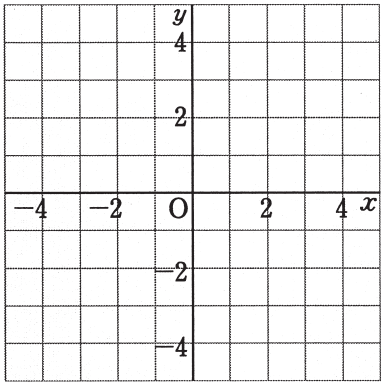
となります。AB＝d とすると

$$d^2=6^2+7^2=85$$

$d>0$ であるから　　$d=\sqrt{85}$

答　$\sqrt{85}$

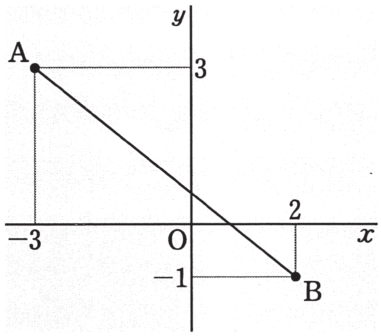
問 13 2 点 A$(-4,\ 3)$，B$(2,\ 1)$ の間の距離を求めなさい。



問 14 ①，②について，2 点 A，B の間の距離を求めなさい。

① 右の図の 2 点 A，B

② A$(3,\ 1)$，B$(-4,\ 3)$



問 15 2 点間の距離について，次の問に答えなさい。

① 2 点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ の間の距離 d が

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

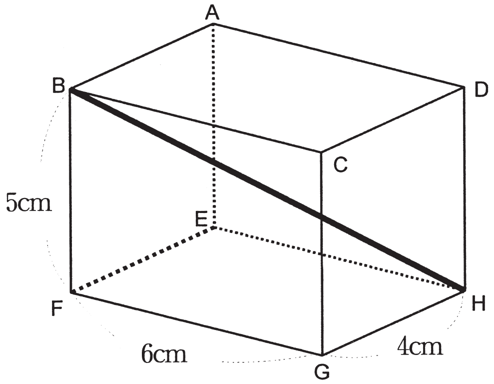
で表されることを示しなさい。

② ①で示した式を利用して，次の 2 点 A，B の間の距離をそれぞれ求めなさい。

A$(2,\ 1)$，B$(5,\ 6)$　　　A$(4,\ 1)$，B$(-3,\ 5)$

2 空間図形への応用

■直方体の対角線



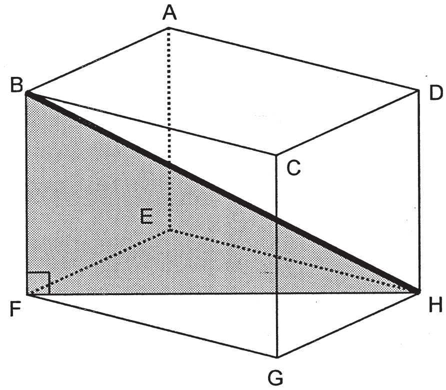
例 1 右の図の直方体で

$GH=4$cm，$FG=6$cm，

$BF=5$cm

のとき，対角線 BH の長さを求めなさい。

<考え方> 底面の対角線 FH をひくと，△BFH は対角線 BH を斜辺とする直角三角形になります。



<解答> △FGH は直角三角形であるから

$FH^2=4^2+6^2$ ……(1)

△BFH も直角三角形であるから

$BH^2=FH^2+5^2$ ……(2)

(1)，(2)から

$BH^2=(4^2+6^2)+5^2=77$

$BH>0$ であるから　$BH=\sqrt{77}$

答　$\sqrt{77}$ cm

●**注意**　AG，CE，DF もこの直方体の対角線で，長さはすべて等しい。

問 1 縦 2cm，横 4cm，高さ 3cm の直方体の対角線の長さを求めなさい。

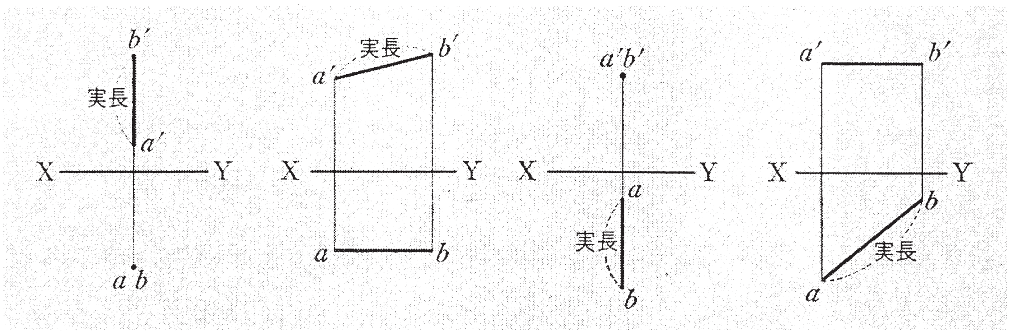
問 2 縦，横，高さがそれぞれ a，b，c である直方体では，対角線の長さは $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ になります。このことを示しなさい。

問 3 1 辺の長さが 6cm の立方体の対角線の長さを求めなさい。

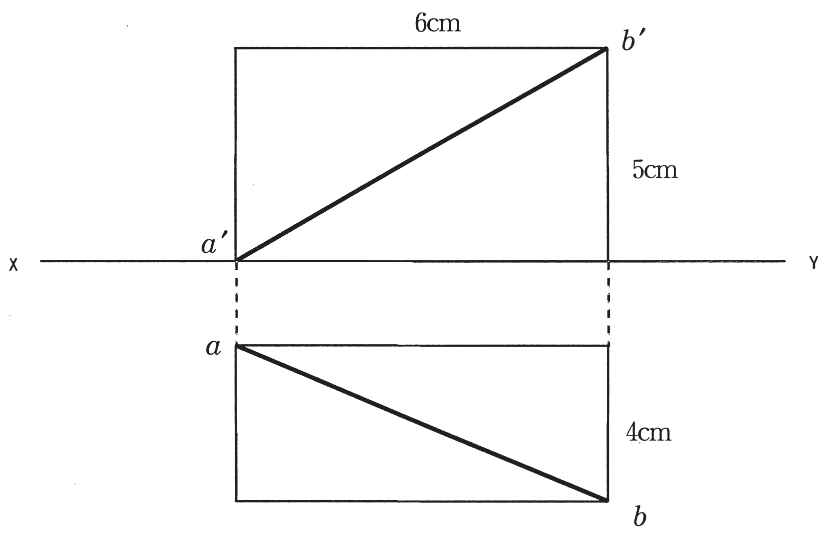
➲➲自分の教室の形を直方体とみて，対角線の長さを求めてみましょう。

■線分の投影図と実長の計算

線分 AB の平面図(または立面図)が 1 点となっているか，基線 XY に平行になっているときは，その線分の立面図(または平面図)に実長(実際の長さ) があらわれています。

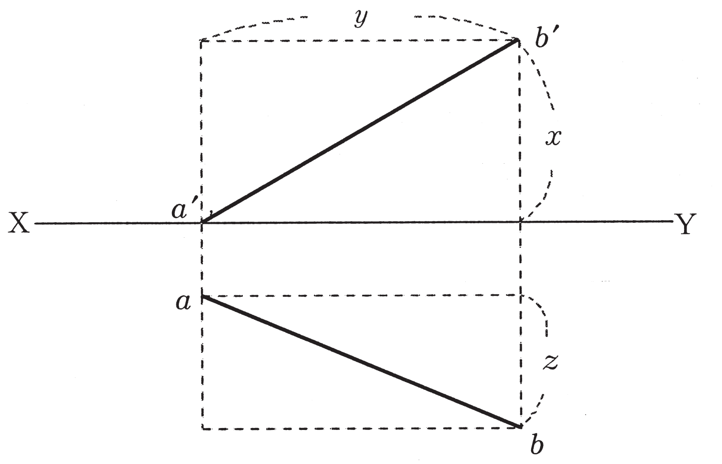


前ページの例 1 で求めた直方体の対角線を，投影図を使って求めてみましょう。

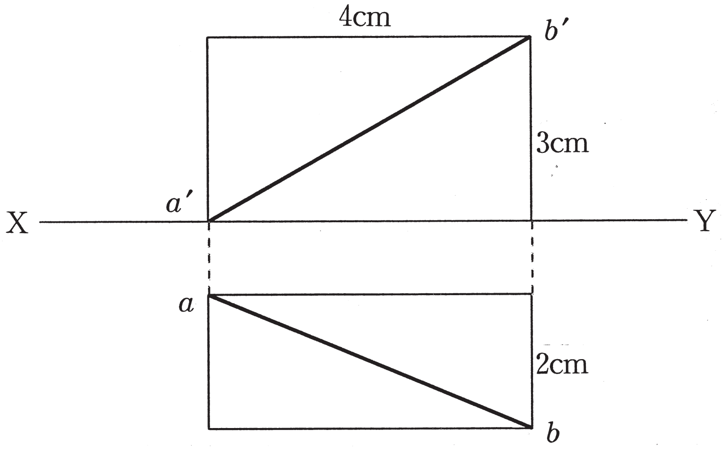


この直方体の対角線 AB は，$AB = \sqrt{5^2 + 6^2 + 4^2}$ で求めることができます。

つまり，対角線の AB の実長を求めるには，次ページの投影図で，x，y，z がわかればよいことになります。



問 4 下の投影図にかかれている直方体の対角線の実長を求めなさい。

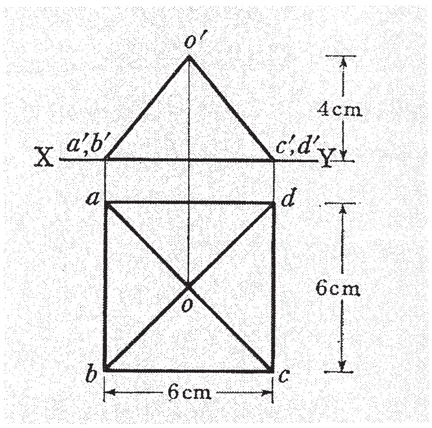


問 5 右の図の投影図で示されている正四角錐 O－ABCD について，次の問に答えなさい。

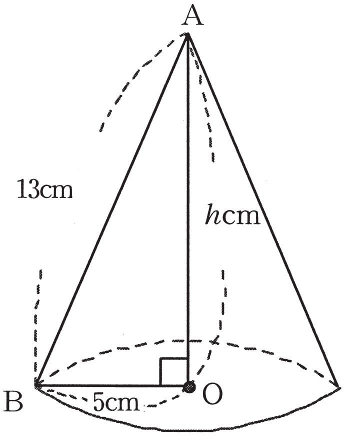
① 側面の △OAB の面積を求めなさい。

② 側面の辺 OA の実長を求めなさい。

③ この立体の体積を求めなさい。



■円錐や角錐の体積



例 2 底面の半径が 5cm，母線の長さが 13cm の円錐の体積を求めなさい。

<考え方> 体積を求めるには，高さがわかればよい。高さを求めるには，頂点から底面に垂線 AO をひき，直角三角形をつくって考えます。

<解答> 右の図で，AO＝$h$cm とすると

$$h^2+5^2=13^2$$

$$h=144$$

$h>0$ であるから　　$h=12$

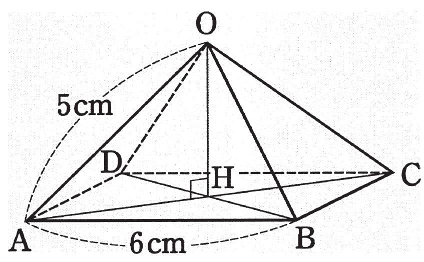
したがって，体積は

$$\frac{1}{3}\times\pi\times5^2\times12=100\pi$$

答　100π cm^3

問 6 母線の長さが 7cm，高さが 5cm の円錐の体積を求めなさい。

問 7 底辺が 1 辺 6cm の正方形で，他の辺が 5cm である正四角錐について，次の問に答えなさい。



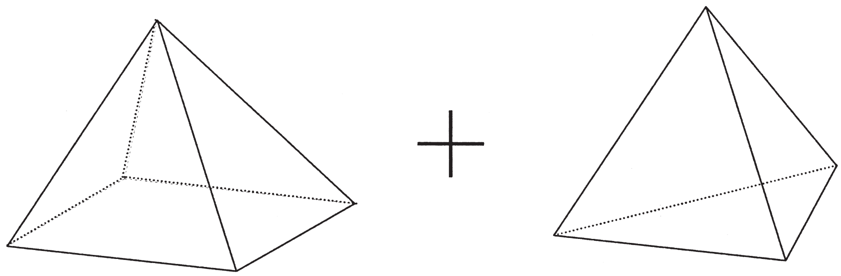
① この立体の表面積を求めなさい。

② この立体の体積を求めなさい。

やってみよう！

＜課題１＞

辺の長さがみな等しい正四角錐と，辺の長さがその正四角錐の辺と等しい正四面体があります。この２つの立体を，合同な面ではり合わせると何面体になるでしょうか。



➲➲すべての辺を6cmとして正四角錐と正四面体つくり，実際にはり合わせて，何面体になるか確かめてみましょう。

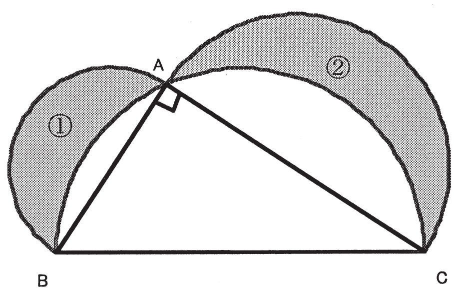
➲➲実際につくってはり合わせてみると，七面体ではなく，五面体になることがわかります。五面体になるわけを，次のようにして考えてみましょう。

① 立体を使って，面が平らになることを明らかにしてみましょう。

② 三平方の定理を使って，面が平らになることを証明してみましょう。

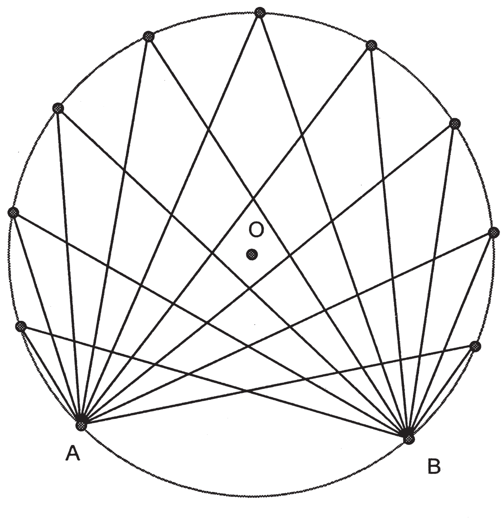
＜課題２＞

直角三角形 ABC（∠A＝90°）の２辺 AB，AC をそれぞれ直径とする半円と，斜辺 BC を直径とする半円を右の図のようにかいたとき，影をつけた部分①，②の面積の和と，△ABC の面積を比べてみましょう。また，なぜそうなるかを考えてみましょう。



第5単元

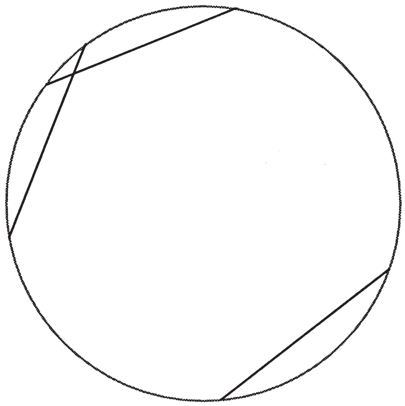
円



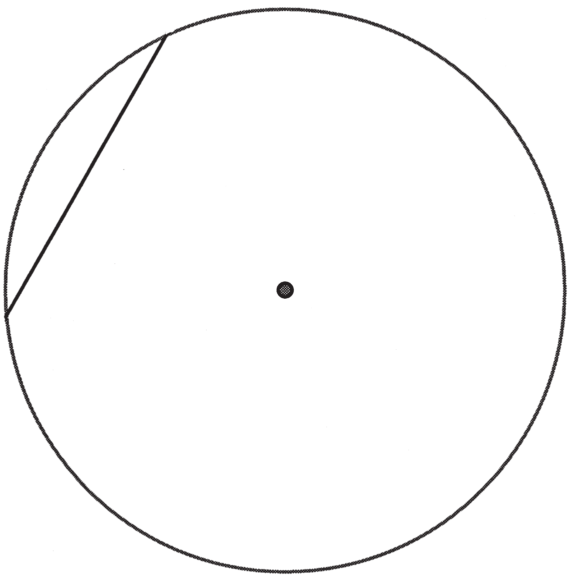
① 円の性質

1 円の基本性質

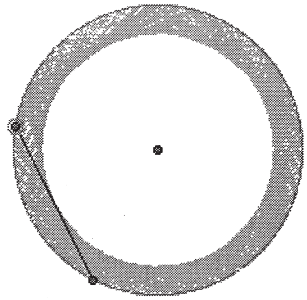
Q 円の中に長さの等しい弦を無数にひくと，何ができるでしょうか。



下の円に，最初からかいてある弦と等しい長さの弦を実際に何本かかいて調べましょう。

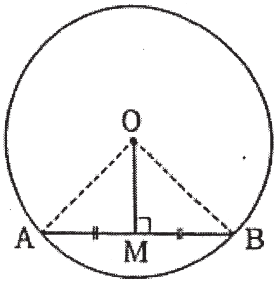


スケッチパッドで **Q** の作業を行うと，右の図のようになります。なぜ，このように円になるのでしょうか。



円になるということは，円の中心から弦までの距離が一定であるということです。

円の中心Oと弦ABの両端を結ぶと，△OABはOA＝OBの二等辺三角形となることから，次の1，2，3が成り立つことがわかります。

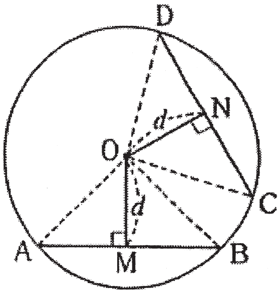


1 円の中心から弦へひいた垂線は，弦の中点で交わる。

2 円の中心と弦の中点とを結ぶ線分は，弦に垂直である。

3 弦の垂直二等分線は円の中心を通る。

1 を用いて，次の 4，5 が証明されます。



4 弦AB＝ 弦CDならば，弦ABと弦CDは中心から等距離にある。

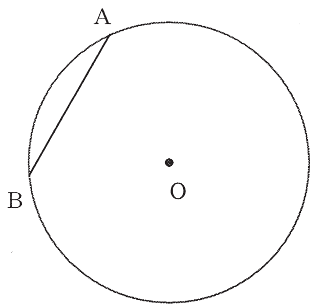
5 弦ABと弦CDが中心から等距離にあれば

弦AB＝ 弦CD

問 1 4，5を証明しなさい。

これらのことから，円の中に長さの等しい弦を無数にひくと，その弦の中点の集合は中心から等距離にある点の集合となるため，円になることがわかります。

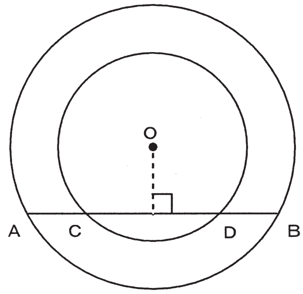
問　2　右の図で，円Oの半径は3cmで弦ABの長さは4cmです。この円にABと同じ長さの弦を無数にひいたときにできる円の半径を求めなさい。



同じ点Oを中心とする2つの円があります。大きいほうの円の1つの弦ABが，右の図のように，小さいほうの円と2点C，Dで交われば

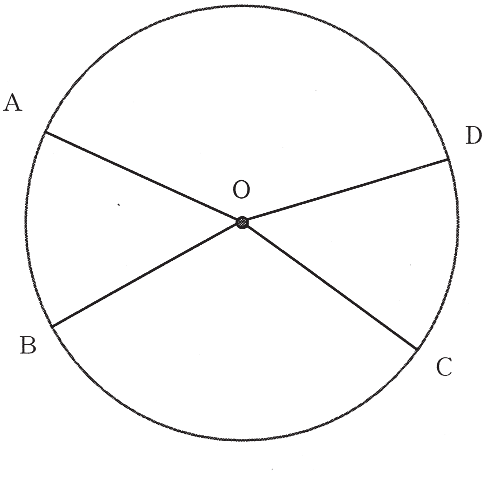
AC＝DB

となります。



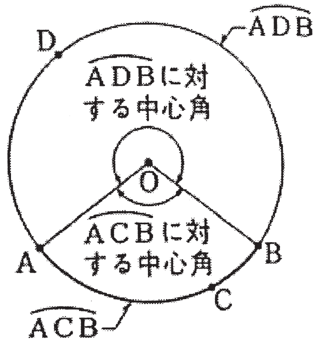
問　3　上のことを前ページの $\boxed{1}$ を使って証明しなさい。

Q　下の図の円Oで，∠AOB＝∠CODのとき，$\overset{\frown}{AB}$ と $\overset{\frown}{CD}$ の長さの間にはどんな関係があるでしょうか。



1つの円周上に2点をとれば，その2点を両端とする弧は2つあります。この2つの弧をたがいに共役な弧といいます。

右の図で，$\overset{\frown}{ACB}$ と $\overset{\frown}{ADB}$ は，たがいに共役な弧です。



たがいに共役な弧に対する中心角の和は，360° です。

1つの円では，次のことが成り立ちます。

$\boxed{6}$ 等しい中心角に対する弧は等しい。

$\boxed{7}$ 等しい弧に対する中心角は等しい。

円の半径を r，中心角の大きさを $x°$，その中心角に対する弧の長さを y とすると，次の式が成り立ちます。

$$y=\frac{\pi r}{180}x$$

このように，弧の長さは中心角の大きさに比例します。

1つの円における弧と弦について，次のことが成り立ちます。

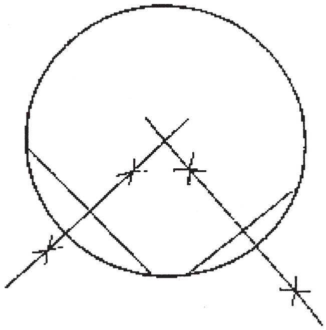
$\boxed{8}$ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ならば 弦AB＝弦CD

$\boxed{\text{問　4}}$ $\boxed{8}$ を証明しなさい。

1つの円で，等しい弧に対する弦は等しいですが，1つの弦に対する弧は2つあるので，逆は成り立ちません。

$\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ で述べたことは，半径の等しい2つの円の弦や弧についても成り立ちます。

問　5　中心のわかっていない円があるとき，どのように作図すれば中心を求めることができますか。その手順を説明しなさい。

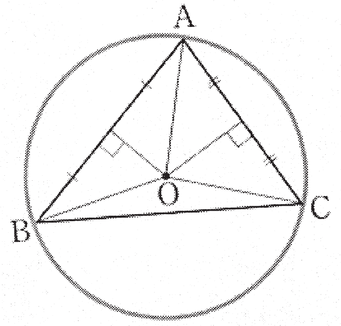


■三角形の外接円

△ABC の 2 辺，たとえば，AB，AC それぞれの垂直二等分線の交点を O とします。線分の垂直二等分線上の点から，その線分の両端までの距離は等しいから

OA＝OB,　OA＝OC

となります。



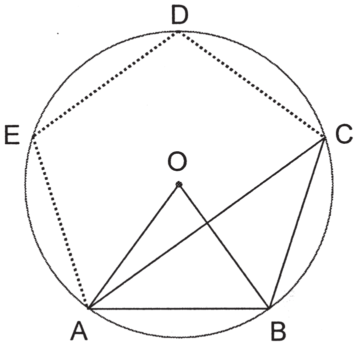
したがって，3 つの頂点 A，B，C は O から等しい距離にあります。

すなわち，A，B，C は O を中心とする 1 つの円の周上にあります。このようなとき，円 O を △ABC の**外接円**といい，△ABC は円に**内接する**といいます。三角形にはかならず外接円があります。三角形の外接円の中心を**外心**といいます。

問　6　いろいろな三角形をかいて，それぞれの外接円をかきなさい。

② 円周角

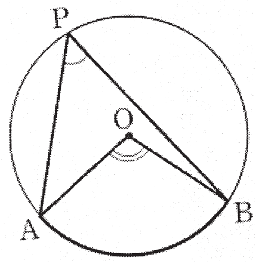
1　円周角と中心角



Q　円Ｏの周を５等分する点を右の図のように A，B，C，D，E とします。

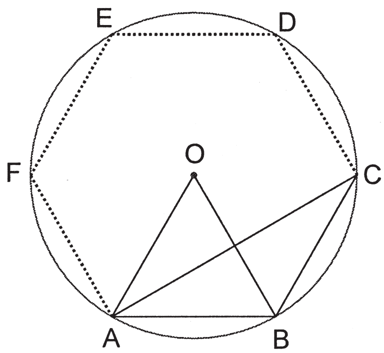
①　∠AOB と∠ACB の大きさはそれぞれ何度でしょうか。

②　∠ADB, ∠AEB の大きさはそれぞれ何度でしょうか。



円Ｏにおいて，$\overset{\frown}{AB}$ を除いた周上の点をＰとするとき，∠APB を $\overset{\frown}{AB}$ に対する**円周角**といいます。また，$\overset{\frown}{AB}$ を円周角∠APB に対する弧といいます。

上の**Q**の正五角形では，円周角はどれも等しく，中心角の半分であるといえます。正五角形だけでなく，他の多角形ではどうでしょうか。正六角形で調べてみましょう。

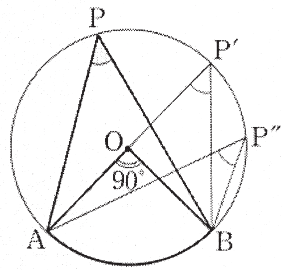


問　1　右の図で多角形 ABCDEF は正六角形です。∠AOB と∠ACB の大きさはそれぞれ何度ですか。また，∠ADB, ∠AEB, ∠AFB の大きさはそれぞれ何度ですか。

▶▶同じ弧に対する円周角がどれも等しく，中心角の半分になることはいつでもいえるでしょうか。

円Oで，$\overset{\frown}{AB}$ が決まると，$\overset{\frown}{AB}$ に対する中心角は1つに決まりますが，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角はいくつもできます。

Q 右の図のように，中心角が 90° の $\overset{\frown}{AB}$ をとり，その $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角∠APB をいろいろな位置につくって，その角の大きさをはかってみましょう。また，中心角を 60° にして，同様なことをしてみましょう。



上のことから，一般に，次の定理が成り立つことが予想されます。

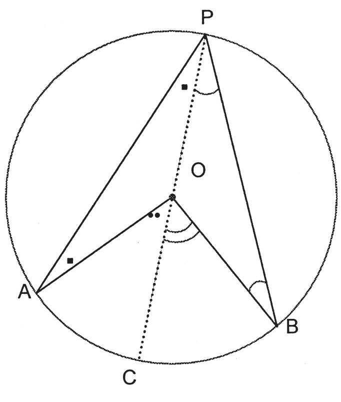
●円周角の定理●

定理 1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の半分である。

上のことを証明しましょう。

上の定理を証明するためには，円Oの $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角の1つを∠APB として，$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$ を示せばよい。

まず，右の図のように中心Oが∠APB の内部にある場合について証明しましょう。



<**証明**>　直径 PC をひくと，$\angle AOC$ は $\triangle AOP$ の外角であるから

$$\angle AOC = \angle APO + \angle PAO$$

$\triangle AOP$ の辺 OP，OA は等しいから

$$\angle APO = \angle PAO$$

したがって　$\angle AOC = 2\angle APO$　…………(1)

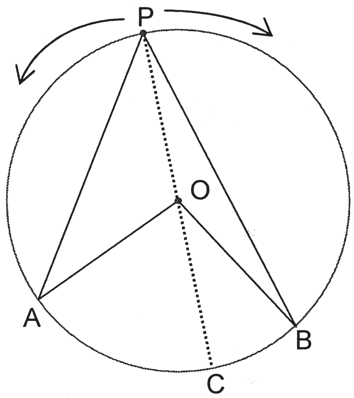
同様にして　$\angle BOC = 2\angle BPO$　…………(2)

(1) と (2) の左辺どうしと右辺どうしをそれぞれ加えて

$$\angle AOB = 2(\angle APO + \angle BPO)$$

したがって　$\angle AOB = 2\angle APB$

すなわち　$\angle APB = \dfrac{1}{2}\angle AOB$



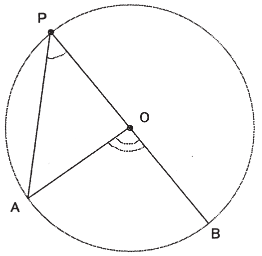
点 P を円 O の円周上を動かしてみます。

中心 O が $\angle APB$ の辺上にある場合（図㋐）

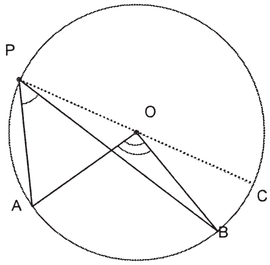
中心 O が $\angle APB$ の外部にある場合（図㋑）

についても，同じように証明することができます。

㋐



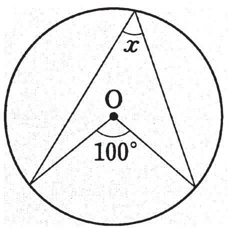
㋑



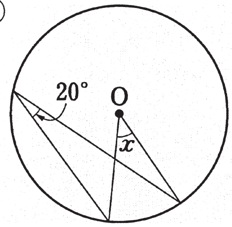
➲➲㋐，㋑の場合について，円周角の定理が成り立つことを証明してみましょう。

問　2　下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

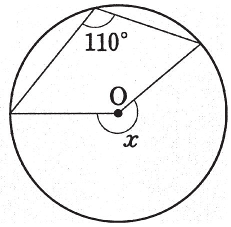
①



②



③

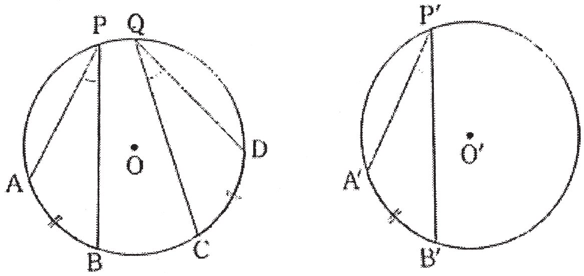


2 円周角と弧

Q 次の問を考えてみましょう。

① 1つの円で，2つの円周角∠APB，∠CQDが等しければ，それに対する$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$は等しい。そのわけを，円周角の定理と101ページの 6 を用いて示しなさい。

② 円周角の定理は，「1つの弧」を「1つの円で長さの等しい弧」と書きかえても成り立つことを確かめなさい。さらに，「1つの円で」を「半径の等しい2つの円で」と書きかえても成り立つことを確かめなさい。



円の半径をr，円周角の大きさを$x°$，その円周角に対する弧の長さをyとすると，次の式が成り立ちます。

$$y=\frac{\pi r}{90}x \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

問 1 上の(1)の式が成り立つことを確かめなさい。

上で調べたことから，次の定理が得られます。

●円周角と弧●

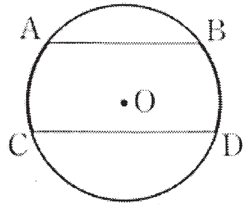
定理 1つの円または半径の等しい円において

1 等しい円周角に対する弧は等しい。

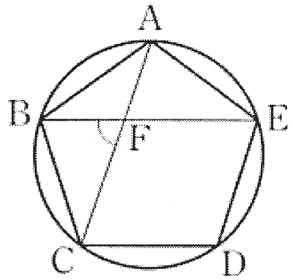
2 等しい弧に対する円周角は等しい。

3 弧の長さと，その弧に対する円周角の大きさは比例する。

問　2　右の図のように，1 つの円で，平行な弦 AB, CD にはさまれた $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BD}$ の長さは等しい。このことを証明しなさい。



問　3　右の図の正五角形 ABCDE で，AC，BE の交点を F とすると，△FAB は二等辺三角形です。このことを証明しなさい。また，∠BFC の大きさを求めなさい。



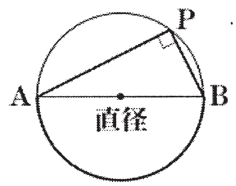
半円の弧に対する中心角は 180°ですから，円周角は 90°です。半円の弧に対する弦は直径ですから，次の定理が得られます。

●直径と円周角●

定理　線分 AB を直径とする円の周上に A, B と異なる点 P をとれば

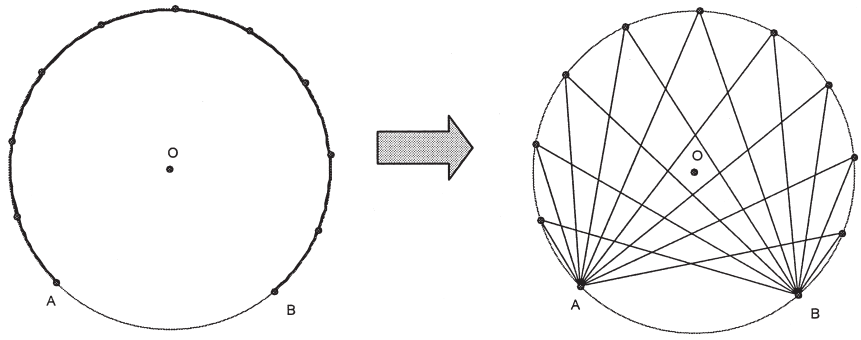
∠APB＝90°

である。

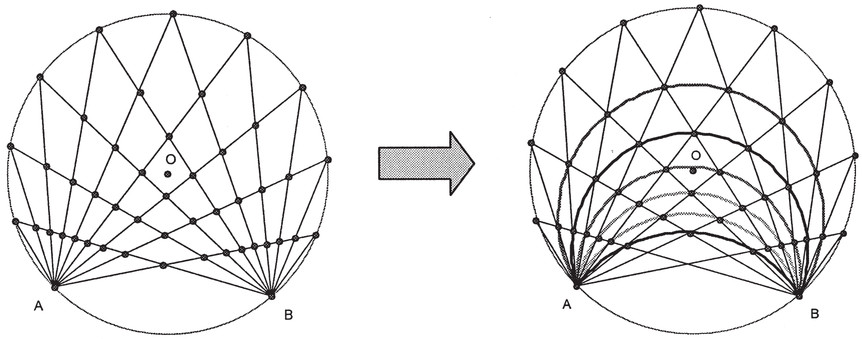


逆に，円周上の 3 点 A，P，B について，∠APB＝90°ならば，AB は直径になります。

例　1　下の図のように円周上に AB をとり，長いほうの$\overset{\frown}{AB}$を 10 等分し，短いほうの$\overset{\frown}{AB}$の円周角を，下の図のようにかいていきます。



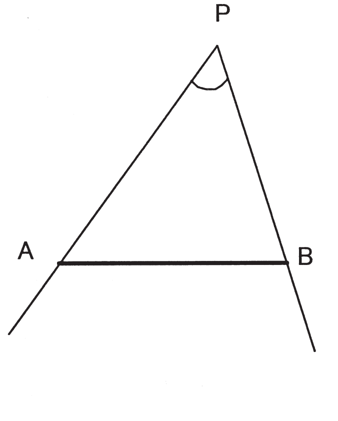
円周角をつくっている弦どうしの交点に着目します。



上のようにつなぐと円の内部に円弧ができます。

問　4　上の図で，円弧ができるわけを証明しなさい。

右の図のように 1 点 P から線分 AB の両端に向かう 2 つの半直線がつくる角∠APB を，点 P から線分 AB を**みこむ角**といいます。



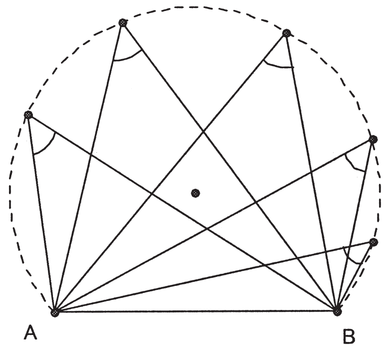
円の定義は

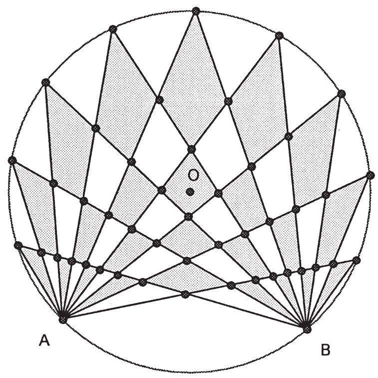
平面上で，定点から等距離にある点の集合

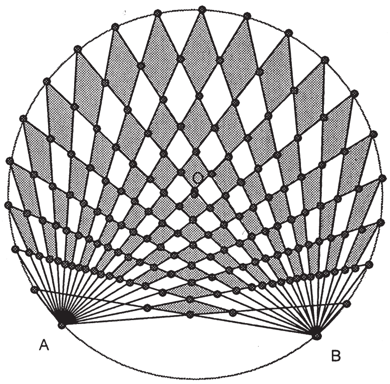
ですが，上のことから円は

弦をみこむ角が等しい点の集合

であると見直すことができます。

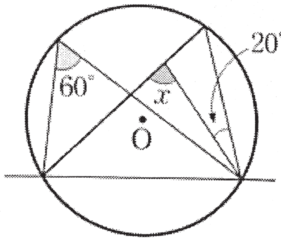






3　円周角の定理の逆

■円の内部と外部



Q　右の図で，$\angle x$ の大きさを求めてみましょう。

円Oの周上の点をA，B，Cとし

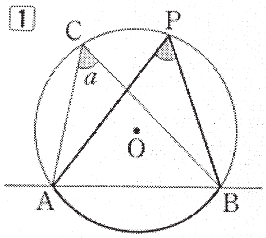
$\angle ACB=\angle a$

とします。また，直線ABについて点Cと同じ側に1点Pをとり，Pが円Oの周上，内部，外部にある場合について，$\angle APB$ と $\angle a$ との大きさを比べてみましょう。

1　点Pが円Oの周上にある場合

円周角の定理により

$\angle APB=\angle a$

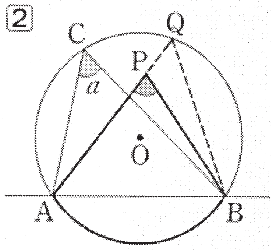


2　点Pが円Oの内部にある場合

APの延長と円周の交点をQとすれば，

$\angle APB$ は $\triangle PQB$ の外角であるから

$\angle APB>\angle a$

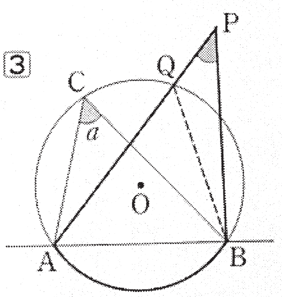


3　点Pが円Oの外部にある場合

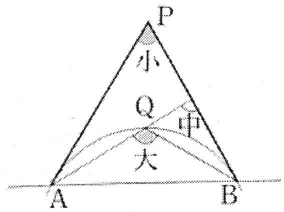
APと円周の交点をQとすれば，

$\angle AQB$ は $\triangle QPB$ の外角であるから

$\angle APB<\angle a$



$\boxed{3}$の場合，AP と円周が交わらないときは，∠APB の内部にある弧の上に点 Q をとって考えればよい。



上で調べたことを整理すると，次の定理が得られます。

●円の内部と外部●

定理　円 O の $\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角を a とし，直線 AB について $\overset{\frown}{AB}$ と反対側に点 P をとるとき

$\boxed{1}$　P が円 O の周上にあれば

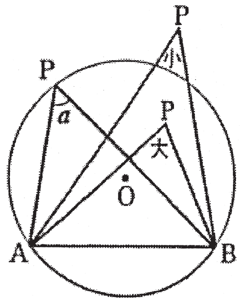
∠APB＝a

$\boxed{2}$　P が円 O の内部にあれば

∠APB＞a

$\boxed{3}$　P が円 O の外部にあれば

∠APB＜a



直線 AB について $\overset{\frown}{AB}$ と反対側に点 P をとるとき，上の定理の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$の逆もそれぞれ成り立ちます。

まず，$\boxed{1}$の逆が成り立つことを証明しましょう。

仮定と結論は，次のようになります。

＜仮定＞　∠APB＝a

＜結論＞　点 P は円 O の周上にある。

<証明> 仮に，「点Pは円Oの周上にない」とすると

(ア) 点Pはこの円Oの内部にある

(イ) 点Pはこの円Oの外部にある

のどちらかです。ところが

(ア)の場合には定理の$\boxed{2}$により　$\angle APB > a$

(イ)の場合には定理の$\boxed{3}$により　$\angle APB < a$

となり，どちらの場合も仮定に反します。

このようなことが起こったのは，点Pが円Oの周上にないとしたからです。したがって，点Pは円Oの周上になければなりません。

すなわち，点Pは円Oの周上になります。

問 1 前ページの$\boxed{2}$，$\boxed{3}$の逆も成り立つことを，上にならって証明しなさい。

●円の内部と外部の逆●

定理 円Oの$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角をaとし，直線ABについて$\overset{\frown}{AB}$と反対側に点Pをとるとき

$\boxed{1}$ $\angle APB = a$であれば，Pは円Oの周上にある。

$\boxed{2}$ $\angle APB > a$であれば，Pは円Oの内部にある。

$\boxed{3}$ $\angle APB < a$であれば，Pは円Oの外部にある。

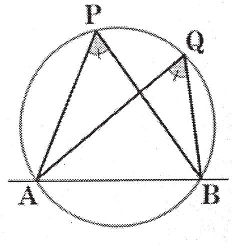
上の定理で$\boxed{1}$は，次のようにいいかえることができます。

●円周角の定理の逆●

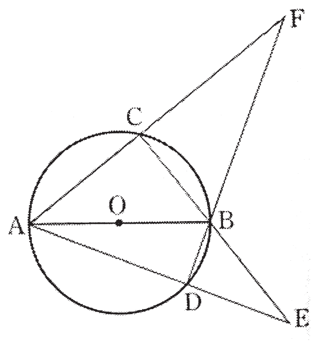
定理 4点A，B，P，Qについて，P，Qが直線ABの同じ側にあって

$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば，この4点は1つの円周上にある。



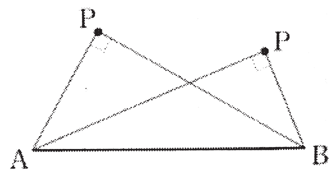
問 2 ABを直径とする円の周上に2点C，Dを図のようにとり，2直線AD，CBの交点をE，AC，DBの交点をFとすると，4点C，D，E，Fは1つの円周上にあります。このことを証明しなさい。



問 3 線分ABがあたえられたとき

$$\angle APB = 90^\circ$$

という条件をみたしながら動く点Pは，どんな線をえがきますか。



■転換法

真である命題があって，これらの定理の仮定はあることがらについてすべての場合をつくし，結論はたがいに独立である（2つのことが同時には成り立たない）とき，これらの真である命題の逆は，すべて真です。このことにもとづいて行う証明法を**転換法**といいます。

円の内部と外部について

$\boxed{1}$ 点Pが円Oの周上にあれば　$\angle APB = a$

$\boxed{2}$ 点Pが円Oの内部にあれば　$\angle APB > a$

$\boxed{3}$ 点Pが円Oの外部にあれば　$\angle APB < a$

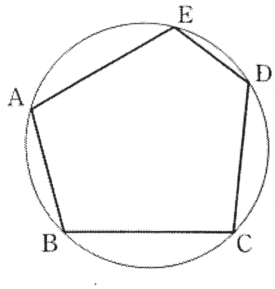
でした。ここで $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$ の仮定は，Pの位置関係のすべての場合をつくしており，結論はどの2つも同時には成り立つことはありません。したがって，この定理の逆が成り立ちます。

$\boxed{1}$ の証明では，「点Pは円Oの周上にないとすれば，$\angle APB = a$ という仮定に反する」ということを示して，仮定（$\angle APB = a$）から結論（点Pは円Oの周上にある）が得られることを証明しています。

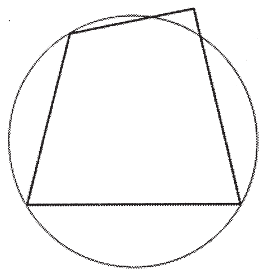
このように，転換法では，形式上，多くの場合，背理法の形で証明します。

問 4 三平方の定理の逆を，転換法を使って証明しなさい。

4 円に内接する四角形

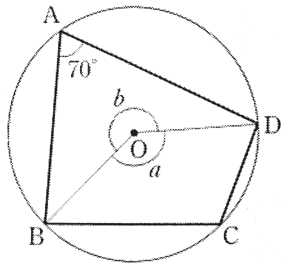


右の図のように，多角形のすべての頂点が１つの円の周上にあるとき，その多角形は円に内接するといい，その円を多角形の外接円といいます。



三角形はかならず円に内接しますが，三角形以外の多角形は，円に内接するとはかぎりません。たとえば，四角形には，円に内接するものと内接しないものとがあります。

▶▶円に内接する四角形の性質や，四角形が円に内接するためにはどんな条件が必要かを調べましょう。

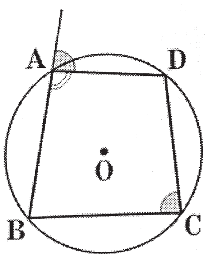


問 1 右の図で，四角形 ABCD は，円 O に内接しています。∠BAD＝70° のとき，右の図の∠a，∠b，∠BCD の大きさを求めなさい。

●円に内接する四角形の性質●

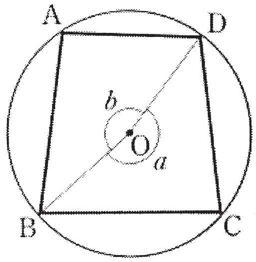
定理 円に内接する四角形では

1. 対角の和は 180° である。
2. 外角はそれととなり合う内角の対角に等しい。



上の定理の$\boxed{1}$を証明するには，四角形ABCDが円に内接しているとして
∠BAD＋∠BCD＝180° を示せばよい。

＜証明＞ $\overset{\frown}{\mathrm{BCD}}$，$\overset{\frown}{\mathrm{BAD}}$ に対する中心角をそれぞれ$\angle a$，
$\angle b$ とすれば



円周角の定理により

$$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\angle a + \frac{1}{2}\angle b$$

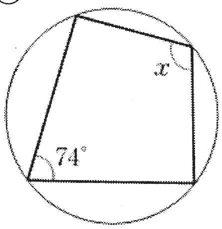
$$= \frac{1}{2}(\angle a + \angle b)$$

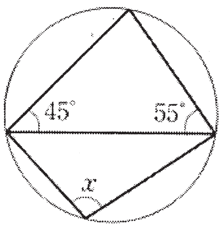
また　　　　$\angle a + \angle b = 360^\circ$

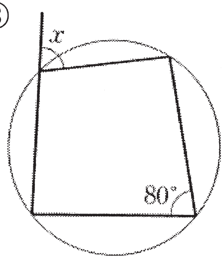
したがって　$\angle \mathrm{BAD} + \angle \mathrm{BCD} = 180^\circ$

問　2　$\boxed{1}$を使って$\boxed{2}$を証明しなさい。

問　3　下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

①


②


③


前ページの定理の逆も成り立ちます。

●四角形が円に内接するための条件●

定理　次の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ のどちらかが成り立つ四角形は円に内接する。

$\boxed{1}$　1組の対角の和が180° である。

$\boxed{2}$　1つの外角がそれととなり合う内角の対角に等しい。

四角形ABCDにおいて∠BAD＋∠BCD＝180°　とし，$\boxed{1}$を証明してみましょう。

＜証明＞　△BCD の外接円を O とし，その$\overset{\frown}{BCD}$に対する円周角の1つを∠BEDとすれば，四角形BCDEは円Oに内接するから

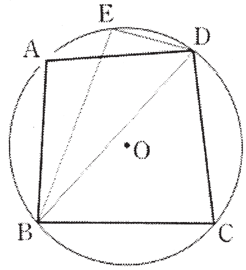
∠BED＋∠BCD＝180°　　･･･(1)

また，仮定により

∠BAD＋∠BCD＝180°　　･･･(2)

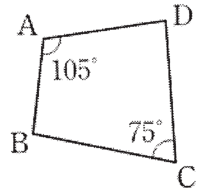
(1)，(2)より　∠BED＝∠BAD

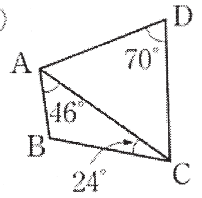
したがって，点Aは円Oの周上にあり，四角形ABCDは円Oに内接する。

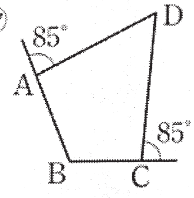


問　4　上で証明した $\boxed{1}$ を使って $\boxed{2}$ を証明しなさい。

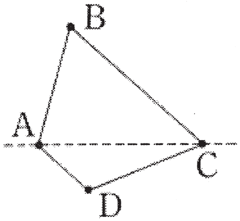
問　5　次の四角形ABCDのうち，円に内接するものはどれですか。

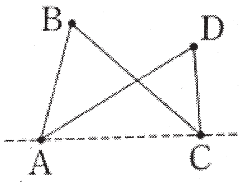
㋐


㋑


㋒


問　6　4点 A，B，C，Dが1つの円周上にあるためには，∠ABCと∠ADCはどんな関係にあればよいですか。B，Dが直線ACの反対側にある場合と，同じ側にある場合に分けて考えなさい。

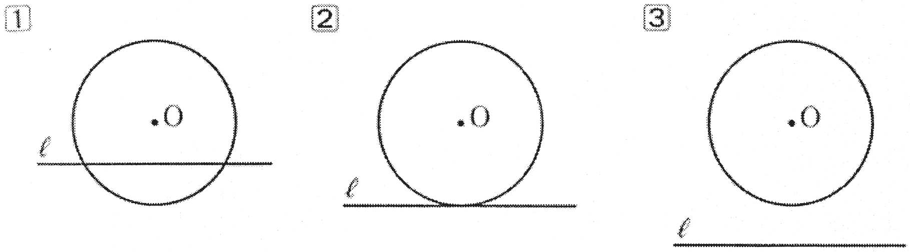




③ 円と直線

1 円と直線

円Oと直線ℓとの位置関係は，次の3つの場合に分けられます。



2点で交わる　　1点で出あう　　出あわない

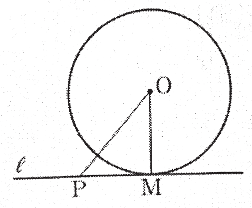
直線が円とただ1点で出あうとき，この直線は円に**接する**といい，この直線を円の**接線**，出あう1点を**接点**といいます。

円の接線を ℓ，接点をMとし，ℓ上のM以外の任意の点をPとすれば，Pは円Oの外部にあるから

OP＞OM

したがって，OMの長さは，Oから ℓまでの最短距離であり，OMは ℓへの垂線となります。

すなわち，OM⊥ ℓ となります。

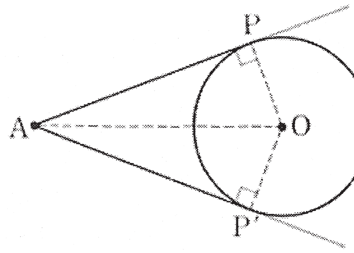


●円の接線●

定理　円の接線は，接点を通る半径に垂直である。

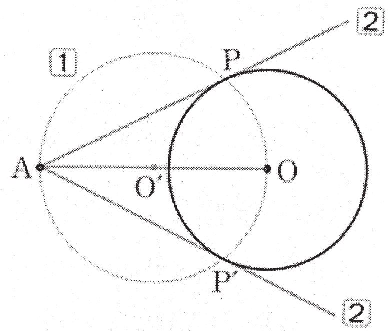
■円外の点からの接線

Q　円O外の1点Aから円Oに接線をひき，その接線をP，P′とすれば，P，P′はAOを直径とする円周上にあります。このわけを考えてみましょう。



上の**Q**で調べたように，P，P′は，AOを直径とする円周上にあります。したがって，円O外の点Aから円Oへの接線は，次のようにしてひくことができます。

1　線分AOを直径とする円をかき，円Oとの交点をP，P′とする。
2　直線AP，AP′をひく。



問 1　円Oと点Aを決めて，接線AP，AP′を作図しなさい。

問 2　上の**Q**で，線分APとAP′の長さが等しいことを証明しなさい。

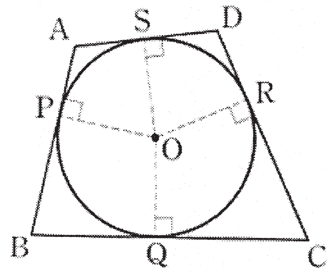
上の線分APまたはAP′の長さを，Aから円Oにひいた**接線の長さ**といいます。

●接線の長さ●

定理　円外の1点からその円にひいた2つの接線の長さは等しい。

問 3 半径 4cm の円 O の中心から 8cm の距離のところに点 A があります。このとき，点 A から円 O にひいた接線の長さは何 cm ですか。

問 4 右の図の四角形 ABCD で，4 辺が円 O に P，Q，R，S で接するとき，次の問に答えなさい。



① AP＝AS，BP＝BQ，
CQ＝CR，DR＝DS
であるわけをいいなさい。

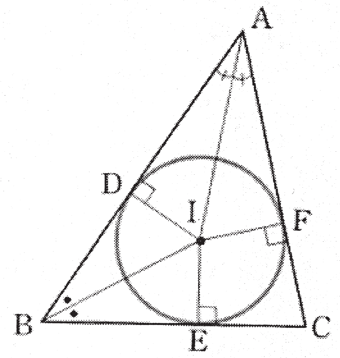
② AB＋CD＝AD＋BC であることを証明しなさい。

■三角形の内接円

△ABC の∠A，∠B の二等分線の交点を I とし，I から 3 辺にひいた垂線を図のように ID，IE，IF とすれば

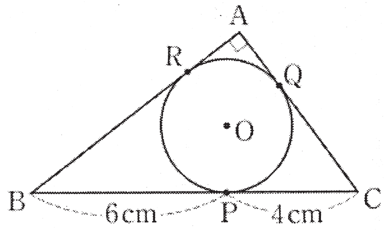
ID＝IE＝IF

となります。したがって，I を中心とし，ID を半径とする円 I をかけば，AB，BC，CA は円 I の接線となります。



このような円 I を △ABC の**内接円**といい，△ABC は円 I に外接するといいます。内接円の中心 I を**内心**といいます。

例 1 右の図で，円Oは直角三角形ABCの内接円で，P，Q，Rは，その接点であるとします。円Oの半径を求めなさい。



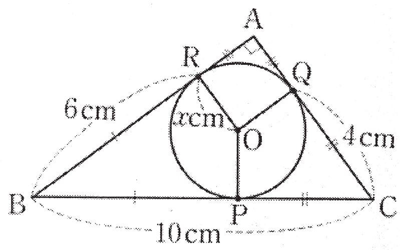
<考え方> 接線の長さの定理により

AQ＝AR，BR＝BP，CP＝OQ

となることに目をつけて考えます。

<解答> QとO,RとOをそれぞれ結ぶと，

四角形 AROQ は正方形です。



円Oの半径をx cmとすると

$$AB＝AR＋RB＝x+6$$

$$AC＝AQ＋QC＝x+4$$

三平方の定理により，

$AB^2＋AC^2＝BC^2$ であるから

$$(x+6)^2+(x+4)^2=10^2$$

左辺を展開して整理すると

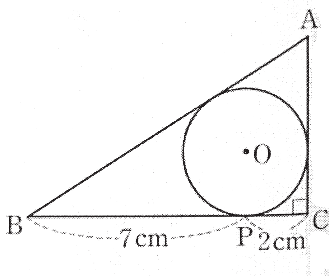
$$x^2+10x-24=0$$

$$(x+12)(x-2)=0$$

$x>0$ であるから　$x=2$

<u>答　2cm</u>

問 5 右の図で，点Pは直角三角形ABCの内接円Oと辺BCの接点であるとします。AB，ACの長さを求めなさい。

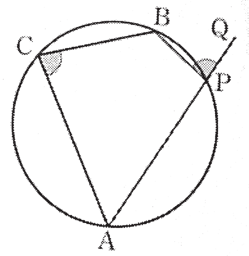


2 接線と弦のつくる角

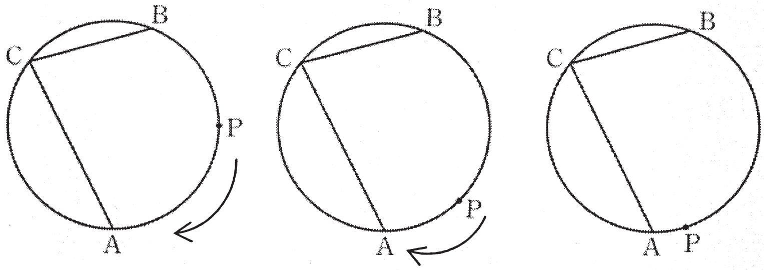
右の図のように，円周上の 3 点を A, B, C とし，$\overset{\frown}{AB}$ 上に点 P をとって AP の延長上に点 Q をとります。このとき，四角形 APBC は円に内接するから

$$\angle BPQ = \angle ACB$$

です。

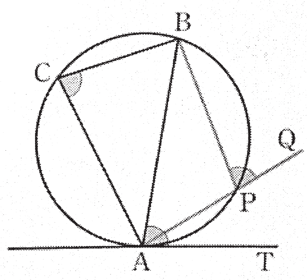


Q 点 P を $\overset{\frown}{AB}$ 上で動かして点 A に近づけていくと，∠BPQ はどうなるでしょうか。点 P が次の位置にあるとき，上にならって∠BPQ をつくって考えてみましょう。



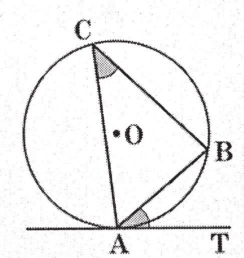
P が A に近づくとき，弦 PB は弦 AB に近づき，直線 AP は A における接線 AT に近づいていきます。

問 1 右の図で，点 P が A に近づいていくと，∠BPQ はどの角に近づいていきますか。

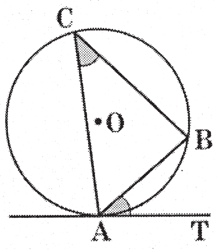


●接線と弦のつくる角（接弦定理）●

定理 円の接線とその接点を通る弦のつくる角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



この定理を証明するには，右の図のように円Ｏの周上の点Ａにおける接線をAT，$\overset{\frown}{AB}$ に対する円周角を∠ACBとして，∠BAT＝∠ACBであることを示せばよい。



＜証明＞

$\boxed{1}$ ∠BATが鋭角の場合

直径ADをひくと，∠DAT＝90°であるから

∠BAT＝90°－∠BAD

また，AD が直径であるから，△ABD は∠ABD＝90°の直角三角形になります。

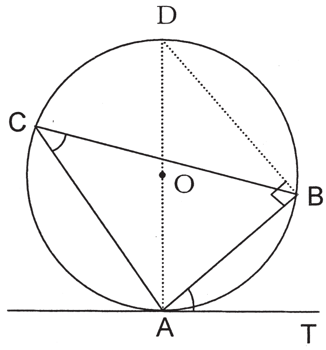
すなわち　　∠ADB＝90°－∠BAD

したがって　　∠BAT＝∠ADB

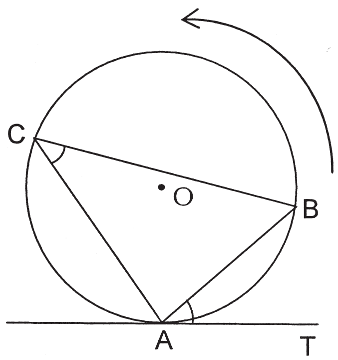
∠ADB と∠ACB は$\overset{\frown}{AB}$に対する円周角であるから

∠ADB＝∠ACB

したがって　　∠BAT＝∠ACB



点Ｂを右の図のように，$\boxed{1}$の場合から矢印の方向に動かしてみます。どんな場合でもこの定理が成り立つことを証明してみましょう。



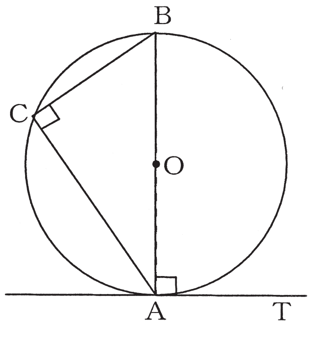
$\boxed{2}$ ∠BATが直角の場合

ABが円Ｏの直径であるから，

∠ACBも直角となります。

すなわち

∠BAT＝∠ACB

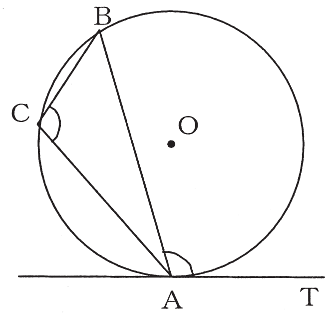


さらに点Ｂを動かしてみよう。

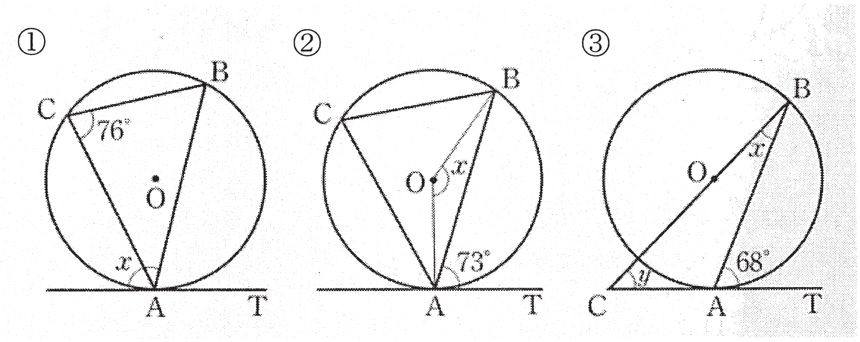
問 2 右の図により，∠BAT が鈍角の場合について

$$\angle BAT = \angle ACB$$

であることを証明しなさい。



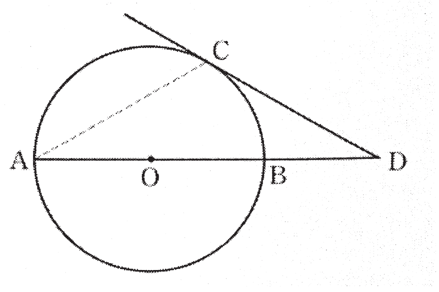
問 3 下の図で，AT は円Ｏの接線であり，点Ａはその接点です。$\angle x$，$\angle y$ の大きさを求めなさい。



問 4 下の図は，AB を直径とする円Ｏの周上の１点をＣとし，Ｃにおける接線と AB の延長との交点をＤとしたものです。

$$AB = 10\text{cm}$$
$$\angle BAC = 30^\circ$$

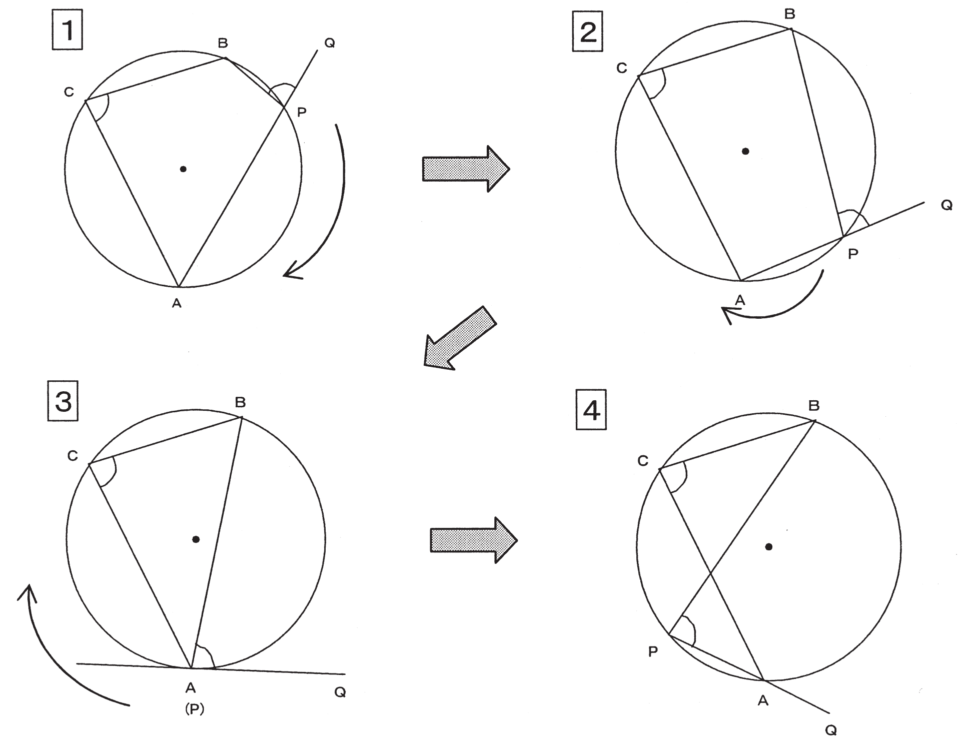
として，次の問に答えなさい。



① AC＝DC であることを証明しなさい。

② BD の長さを求めなさい。

▶▶下の$\boxed{1}$の図から点Ｐを矢印の方向に動かして，∠BPQ のようすを観察してみましょう。



上の図では

$\boxed{1}$と$\boxed{2}$は　円に内接する四角形の定理

$\boxed{3}$は　　　接線と弦のつくる角の定理

$\boxed{4}$は　　　円周角の定理

の図になっています。

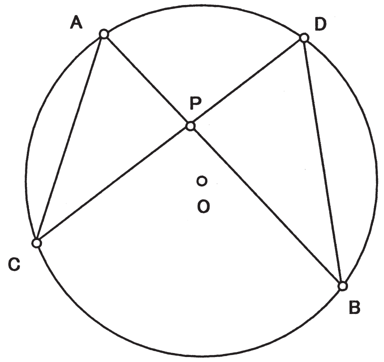
そして，どの場合も∠ACB＝∠BPQ となり，どの定理についても同じ角について述べていることがわかります。

3　方べきの定理

例　1　右の図1のように，円Oに2つの弦AB，CDをひき，その交点をPとします。このとき

$\triangle ACP \backsim \triangle DBP$

となります。このことを証明しなさい。



＜図1＞

＜証明＞　$\triangle ACP$ と $\triangle DBP$ において

対頂角が等しいから

$\angle APC = \angle DPB$

$\overset{\frown}{CB}$ に対する円周角は等しいから

$\angle CAP = \angle BDP$

2組の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ACP \backsim \triangle DBP$

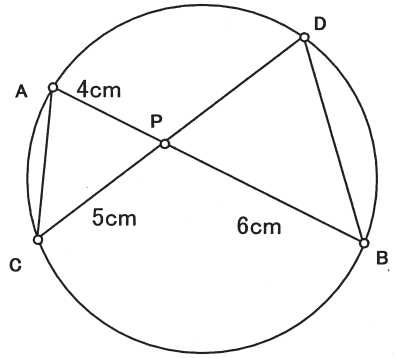
$\triangle ACP \backsim \triangle DBP$ であることから，　$AP : DP = CP : BP$ が得られます。

したがって

$AP \times BP = DP \times CP$

これを**方べきの定理**といいます。

問　1　右の図で，PDの長さを求めなさい。

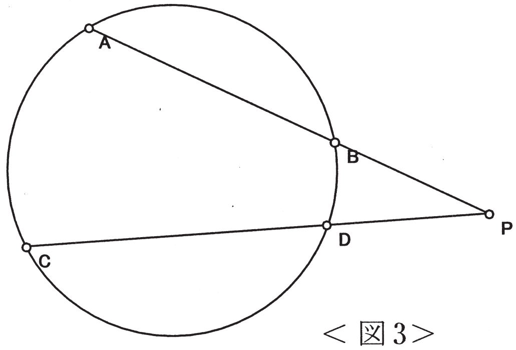


＜図2＞

▶▶前ページの問題を発展させてみましょう。

図 1 では，AB，CD の交点 P は円の内部にありました。では，AB，CD の交点 P が円外にある場合を考えてみましょう。

このときの図は，右の図 3 のようになります。



＜図3＞

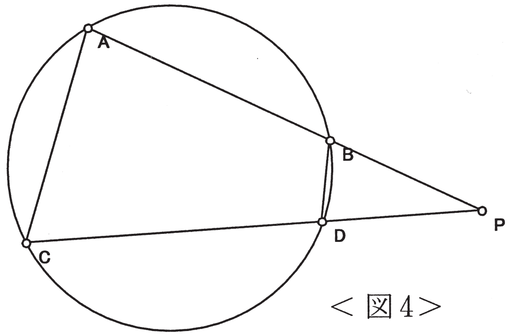
図3のように交点Pが円外になったときにも，図1と同じように，相似な図形ができるでしょうか。

図 4 のように A と C，B と D をそれぞれ結んでみましょう。このとき，△ACP ∽ △DBP となるでしょうか。

問 2 右の図で

AP : DP＝CP : BP

を証明しなさい。

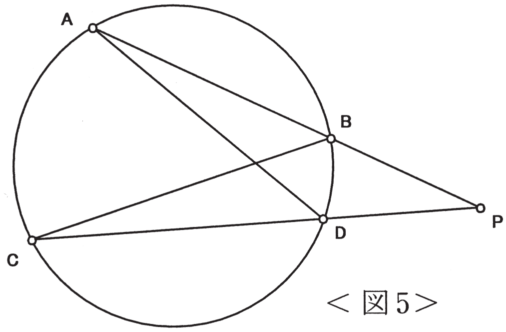


＜図4＞

問 3 図5のようにAとD，BとCをそれぞれ結び

AP : CP＝DP : BP

を証明しなさい。

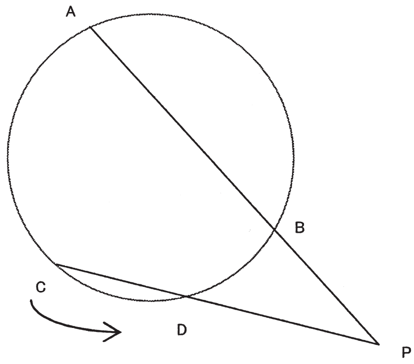


＜図5＞

問 4 上の問 2，問 3 から導かれる AP，CP，DP，BP の長さの関係を式で表しなさい。

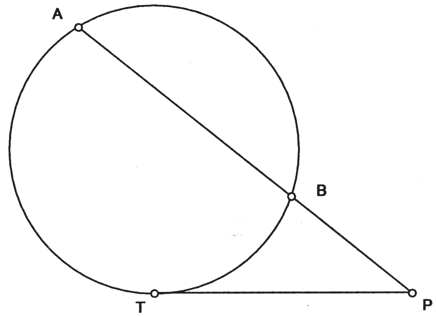
右の図6のように，点Cを下へ動かして，CとDを近づけてみましょう。

＜図6＞



点C，Dをさらに近づけると，C，Dが一致し，接点Tとなります。
図7がそのときの図で，PTは円の接線となります。

＜図7＞

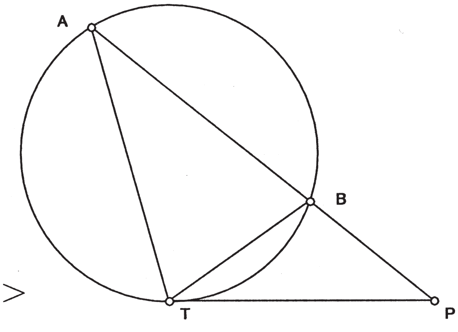


問　5　図8のように，BとTを結び

$$PA : PT = PT : PB$$

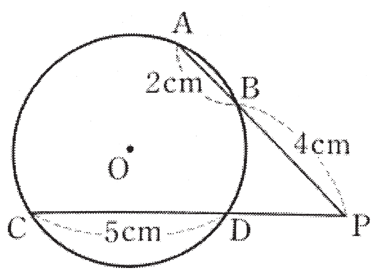
を証明しなさい。

＜図8＞



問5で証明したことから $PA \times PB = PT^2$ が得られます。

問　6　右の図で，点A，B，C，Dは円Oの周上の点です。このとき，PDの長さを求めなさい。



考えてみよう！

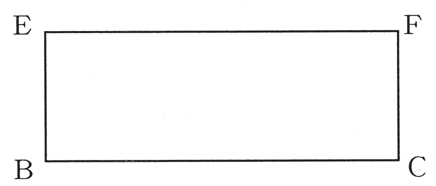
方べきの定理を使って，長方形と面積が等しい正方形をかいてみましょう。

2年のときに

すべての多角形は，等積変形で三角形になおすことができ，さらに長方形に等積変形することができる

ということを学びました。

さらに，右の図の長方形 EBCF は，次のような方法で，等しい面積の正方形に変形できます。



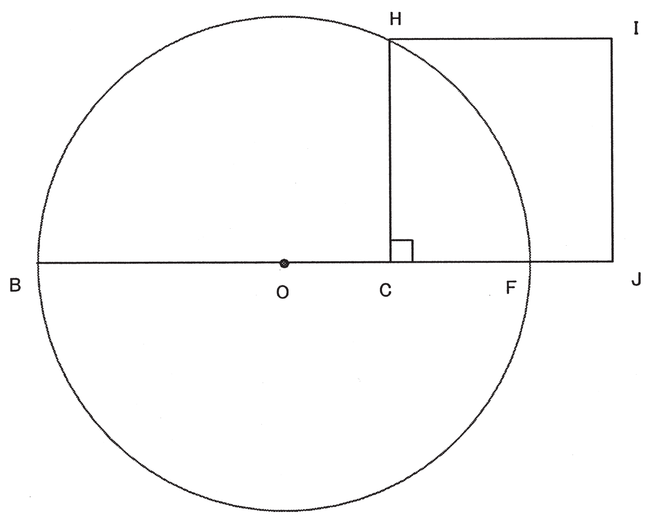
$\boxed{1}$ 下の図のように，線分 BC と線分 CF の長さの和に等しい線分 BF をかく。

$\boxed{2}$ BF の中点をOとし，O を中心として，BF を直径とする円をかく。

$\boxed{3}$ 点 C を通る BC の垂線をひき，円周との交点をHとする。

$\boxed{4}$ CH を1辺とする正方形 HCJI をかく。

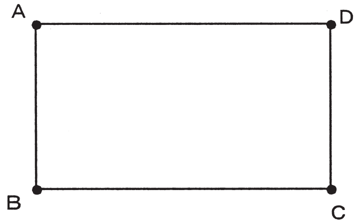
この正方形が，上の長方形 EBCF と等積である。



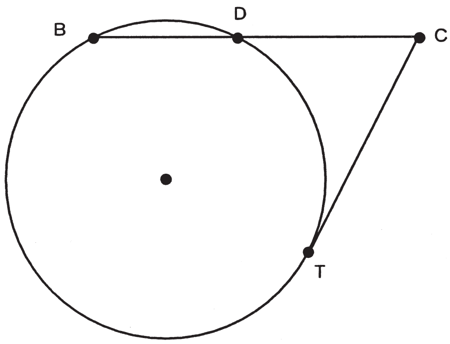
これは，方べきの定理から， $BC \times CF = CH^2$ となることを根拠としています。

長方形の面積と等しい正方形をかく方法は，ほかにもあります。

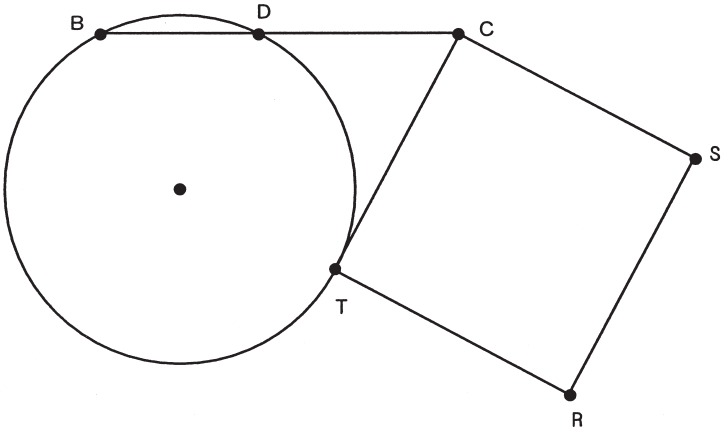
右の長方形 ABCD と面積が等しい正方形をかいてみましょう。



$\boxed{1}$ 円をかき，下の図のように，BC と CD の長さが上の図の長方形と等しくなるように弦BDとその延長上に点Cをとり，点Cから円へ接線をひき，接点を T とする。



$\boxed{2}$ $\boxed{1}$でひいた CT を１辺とする正方形をかく。方べきの定理から，$BC \times CD = CT^2$ なので，正方形 CTRS の面積は，上の長方形 ABCD の面積と等しくなります。

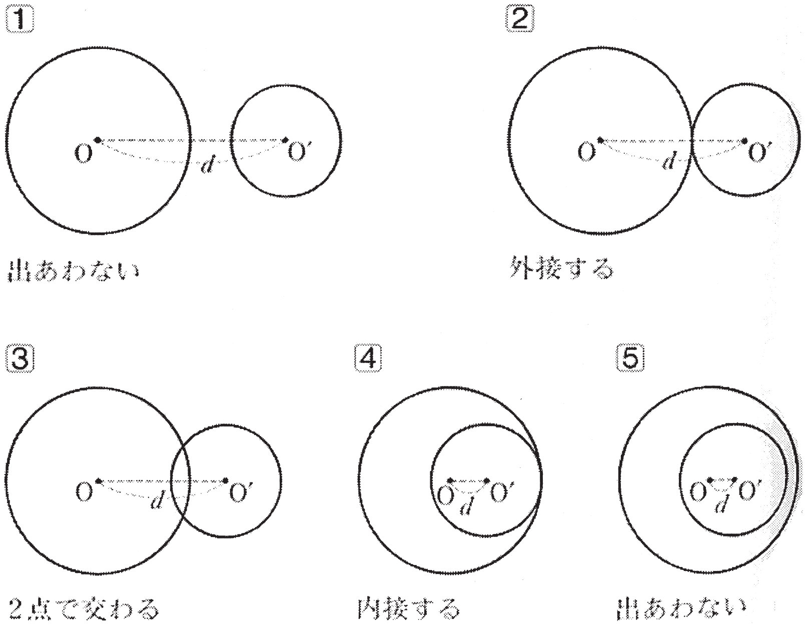


➲➲長方形をかき，その長方形と面積の等しい正方形をかいてみましょう。

④ 2つの円

1 2つの円

2つの円の位置関係については,図に示すような5通りの場合が考えられます。



2のような場合，2つの円は**外接する**といい，4のような場合，**内接する**といいます。また，それぞれ出あう1点を**接点**といい，その接点は2つの円の中心を通る直線上にあります。

問 1 2つの円O，O′があり，円O，O′の半径がそれぞれ5cm，3cm，中心間の距離がdであるとき，次の問に答えなさい。

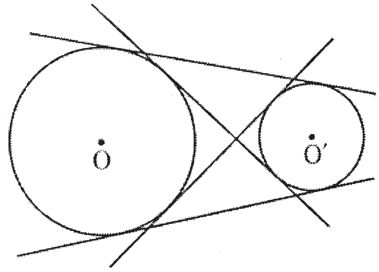
① 円O，O′が外接するとき，dは何cmですか。

② dの値がどんな範囲にあるとき，円O，O′が2点で交わりますか。不等号を使って表しなさい。

問　2　半径の等しい2つの円については，どのような位置関係が考えられますか。図をかいて示しなさい。

■2つの円の共通な接線

Q　2つの円の位置関係が右の図のような場合，2つの円に共通な接線は4本あります。これ以外の位置関係の場合について，共通な接線の数を調べてみましょう。



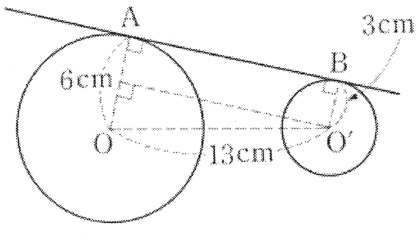
2つの円に共通な接線の数は，2つの円の位置関係によって異なります。

問　3　半径が a cm，b cm の2つの円があり，それらの中心間の距離を d cm とします。次の①～④の場合について，2つの円に共通な接線の数を求めなさい。

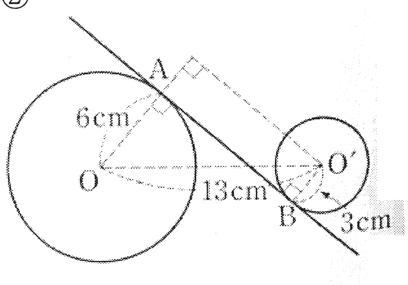
	①	②	③	④
a	3	4	2	5
b	5	3	3	3
d	10	6	5	2
接線の数				

問　4　下の図のような2つの円O，O′があります。ABは円O，O′の共通な接線で，A，Bはその接点です。このとき，線分ABの長さを求めなさい。

①

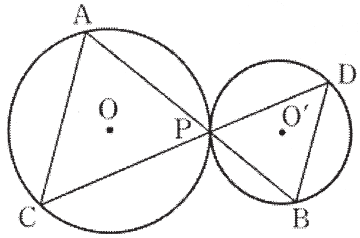


②



▶▶2 つの円についてのいろいろな問題を考えてみましょう。

例　1　点 P で外接する 2 つの円 O，O′ があります。P を通る直線が 2 つの円と右の図のように A，B および C，D で交わるとき，$AC \parallel BD$ となることを証明しなさい。



＜証明＞　右の図のように，P における共通な接線 EF をひけば

$\angle CPF = \angle CAP$

$\angle DPE = \angle DBP$

また，対頂角は等しいから

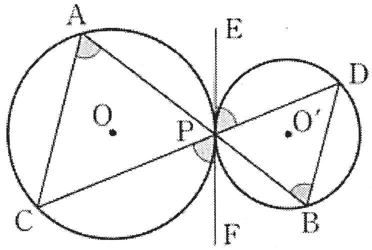
$\angle CPF = \angle DPE$

したがって

$\angle CAP = \angle DBP$

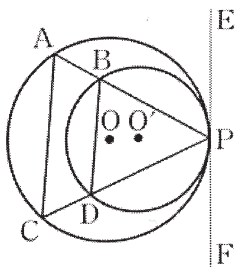
錯角が等しいから

$AC \parallel BD$



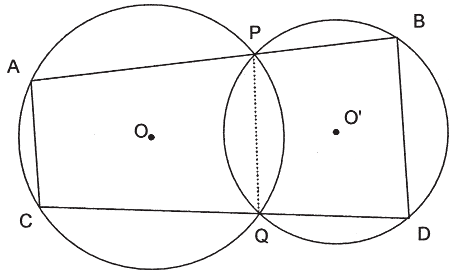
上の例のように，2 つの円が接しているとき，共通な接線が問題の解決に役立つことがあります。

問　5　上の例において，2 つの円 O，O′ が点 P で内接するとき，$AC \parallel BD$ は成り立ちますか。

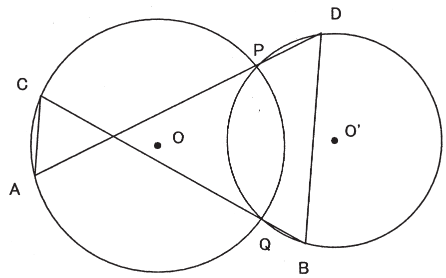


前ページの例1では，2つの円O，O′が点Pで外接するとき，そして問5では，2つの円O，O′が点Pで内接するとき，それぞれについてAC∥BDを証明しました。それでは，2つの円O，O′が2点P，Qで交わっているとき，同じようにAC∥BDが成り立つでしょうか。

問　6　右の図のように2つの円O，O′が2点P，Qで交わっているとき，AC∥BDは成り立ちますか。

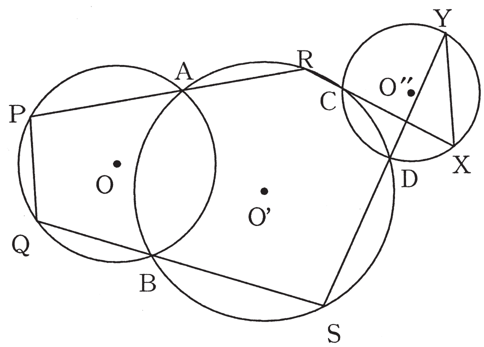


2つの円O，O′が2点P，Qで交わっているとき，上の図の点Aと点Cを動かしてみると，右の図のような場合も考えられます。

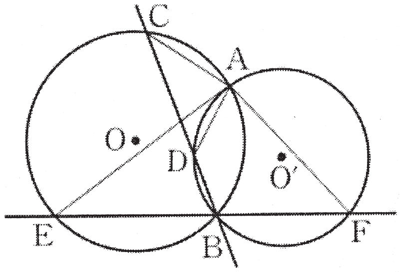


問　7　右の図の場合，AC∥BDは成り立ちますか。

問　8　3つの円O，O′，O″があります。円O，O′の交点をA，Bとし，円O′，O″の交点をC，Dとします。円Oの周上の2点をP，Qとし，直線PA，QBが円O′とふたたび交わる点をそれぞれR，Sとします。また，直線RC，SDがふたたび円O″と交わる点をそれぞれX，Yとすると，PQ∥XYとなります。このことを証明しなさい。



例 2 2つの円O, O′が2点A, Bで交わっています。点Bを通る2つの直線が，図のように円 O，O′と，それぞれC，DおよびE，Fで交わっているとき，△ACD∽△AEFであることを証明しなさい。



＜証明＞ △ACDと△AEFにおいて

1つの弧に対する円周角は等しいから

∠ACD＝∠AEF ・・・・・・・・・・・・・(1)

四角形ADBFは円O′に内接しているから

∠ADC＝∠AFE ・・・・・・・・・・・・・(2)

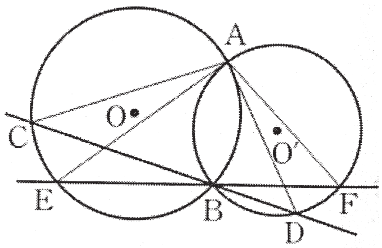
(1)，(2)から，2組の角がそれぞれ等しいから

△ACD∽△AEF

問 9 上の例で，Bを通る直線が右の図のような場合にも

△ACD∽△AEF

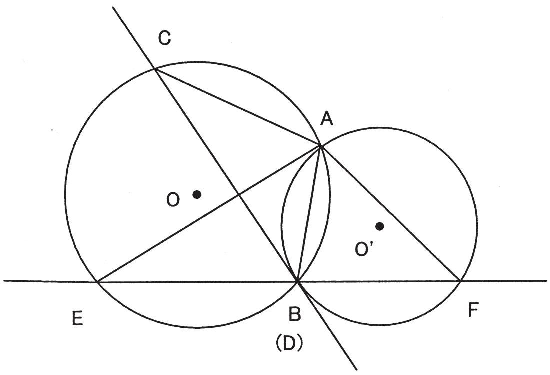
であることを証明しなさい。



問 10 上の問9で，点Dを点Bに近づけていき，DがBと一致したとき，CBは円O′の接線となります。このときも

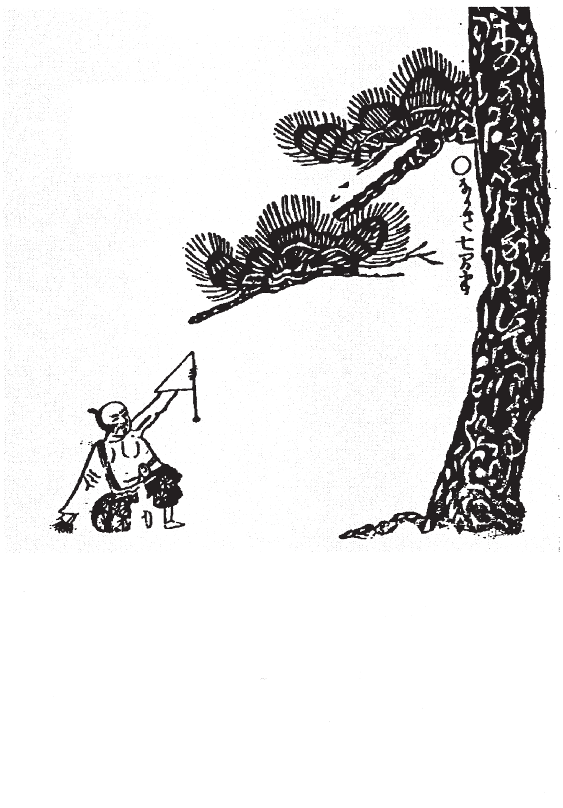
△ACB∽△AEF

であることを証明しなさい。

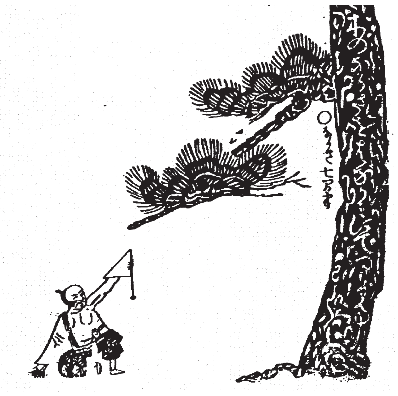


第6単元

三角比



① 三角比

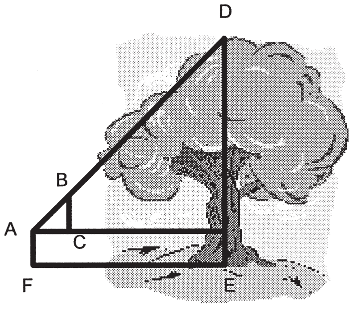


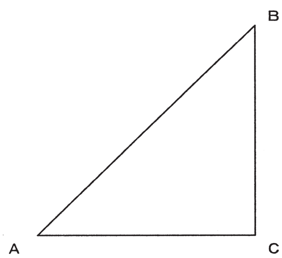
1　正接

▶▶ 高い木の高さは，どのようにして測ればよいでしょうか。

ひろしさんは，次のようにして測る方法を考えました。

下の右の図のように，正方形の紙を半分に切って直角二等辺三角形ABC をつくり，B におもりをつけます。おもりを利用してBC が地面に垂直になるようにし，左の図のようにAB と木の頂点 D が一直線となる場所を探します。この地点から木までの距離 FE をはかり，それに目の高さAF を加えたものが木の高さとなります。

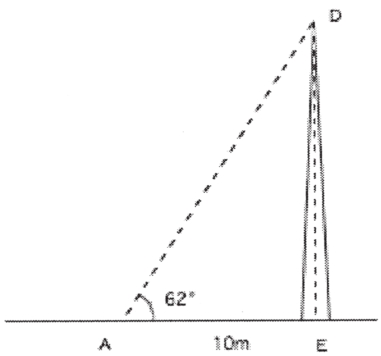


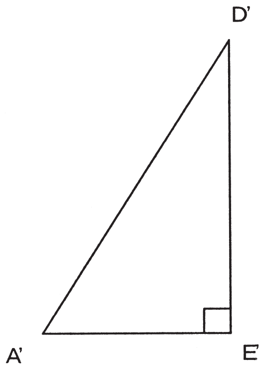


問　1　この方法で木の高さが測れるわけを考えてみなさい。

ゆきこさんは，ひろしさんの方法で，校庭にある木の高さを測ろうとしました。

ゆきこさんは，AB と木の頂点 D が一直線になるように下がっていきましたが，途中に障害物があり，一直線になる場所まで下がることができません。そこで，その場で，木の頂点 D を見上げて，角度を測ったら，62° でした。その場所は，木からちょうど 10m のところでした。





問　2　上の木 DE の高さを縮図をかいて求めなさい。ただし，目の高さは考えないものとします。

上の問では，△DAE と相似な△D′A′E′ を

$$\triangle \mathrm{DAE} \backsim \triangle \mathrm{D'A'E'}$$

となるようにかくと

$$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{D'E'}}{\mathrm{A'E'}}$$

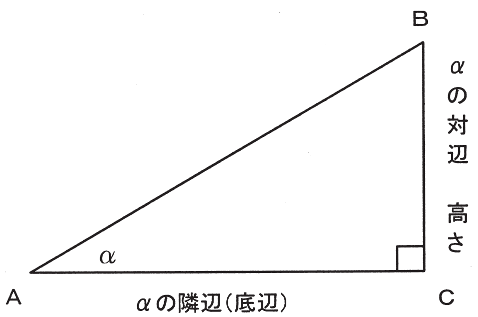
したがって　　$\mathrm{DE} = \mathrm{AE} \times \dfrac{\mathrm{D'E'}}{\mathrm{A'E'}}$

であることを用いました。このことから，DE の長さを求めるには，AE の長さと，∠DAE が 62° のときの DE と AE の比の値 $\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}} = \dfrac{\mathrm{D'E'}}{\mathrm{A'E'}} = t$ がわかれば，いちいち縮図をかかなくても求めることができます。

この t の値について考えてみましょう。

右の図は，∠C が直角である直角三角形 ABC を示しています。

この図の α に向かい合っている辺 BC を α の**対辺**（高さ）といい，対辺に垂直な辺 AC を α の**隣辺**（底辺）といいます。



対辺，隣辺ということばを用いると，αが決まれば，$\dfrac{対辺}{隣辺}$が一定になります。

この値がtです。

このtの値$\left(\dfrac{対辺}{隣辺}の値\right)$を，$\alpha$の**正接**または$\alpha$の**タンジェント**といい，**tan$\alpha$**で表します。tan$\alpha$を「タンジェントアルファ」と読みます。

$$\tan\alpha = \frac{対辺}{隣辺}$$

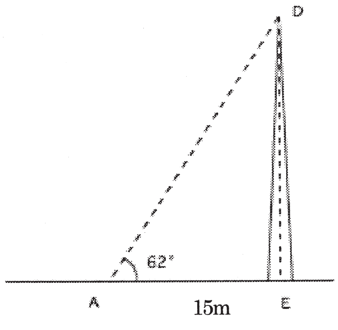
たとえば，αが62°のときのタンジェントをtan62°と表します。

tan62°の値はグラフ電卓で簡単に求めることができます。また，三角比の表を見てもわかります。

tan62°≒1.8807　なので，DEの長さは　DE≒AE×1.8807　で求められます。

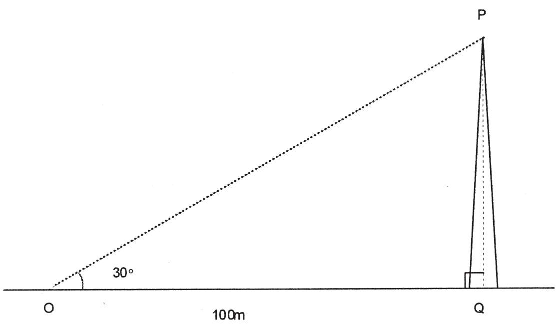
このように，tan62°の値がわかれば，今度はほかの木であっても，見上げた角度が62°のところから木までの距離を測れば，木の高さを求めることができます。

問　3　tan62°を使って，右の図の木の高さDEを求めなさい。



➲➲木の高さを測るほかの方法も考えてみましょう。

問　4　タンジェントを使って，右のテレビ塔の高さPQを求めなさい。



▶▶ $0^\circ \leqq A \leqq 90^\circ$ で，大まかに $\tan A$ の値の変化を調べてみましょう。

Q 隣辺が 10cm の直角三角形をかき，右の表のそれぞれの角のタンジェントの値を求め，書き入れてみましょう。

① この表で，A の値が 2 倍，3 倍になると，$\tan A$ の値はどのように変化しているでしょうか。

② $\tan A$ は，A に比例しているといえるでしょうか。

A	$\tan A$
0°	
10°	
20°	
30°	
40°	
50°	
60°	
70°	
80°	
90°	

問 5 A の値が 1° ずつ増えていくときの，$\tan A$ の値を，グラフ電卓を利用して求め，右の表に書き入れなさい。

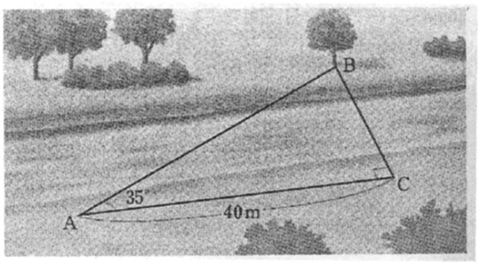
A	$\tan A$
71°	
72°	
73°	
74°	
75°	
76°	
77°	
78°	
79°	
80°	

問 6 右の図のような川があり

AC＝40m, ∠BAC ＝35°

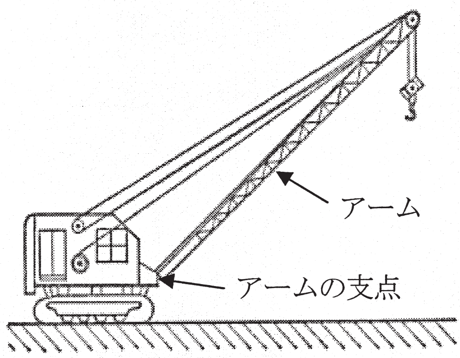
であることがわかっています。

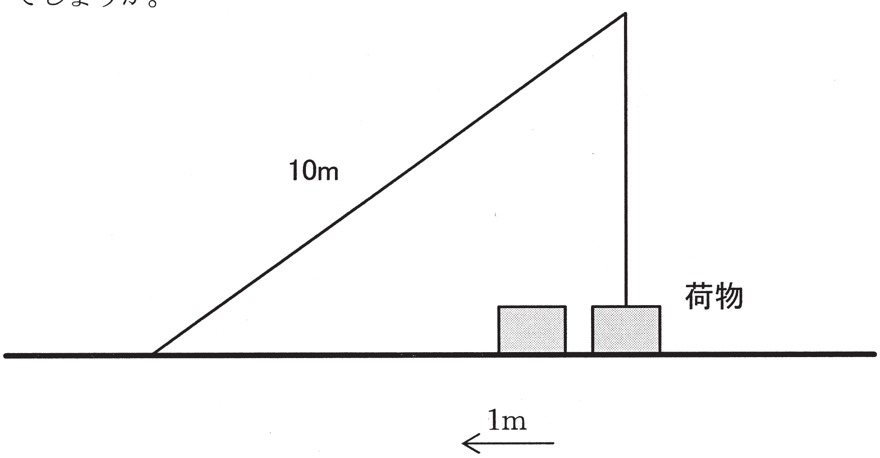
BC の長さを求めなさい。



2 正弦，余弦

Q 右の図のようなクレーン車があります。このクレーン車のアームの長さを 10m に固定します。このとき，荷物がアームの支点から 8m のところに置いてあります。この荷物を 1m だけ，クレーン車のほうにひき寄せるには，アームの角度を何度から何度にしたらよいでしょうか。





BA=BD=10m, BC=8m, BE=7m,

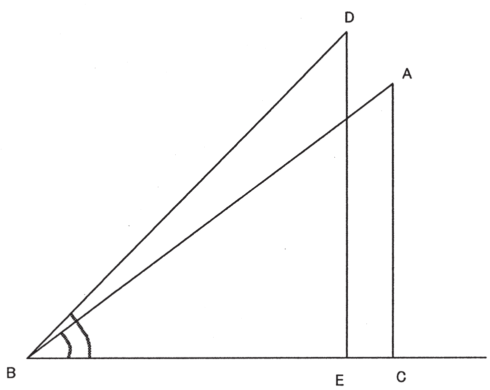
∠ACB=∠DEB=90°

の△ABC，△DBE について，縮図をかいて調べると

∠ABC≒37°

∠DBE≒46°

であることから，アームの角度を 37° から 46° にすればよいことがわかります。



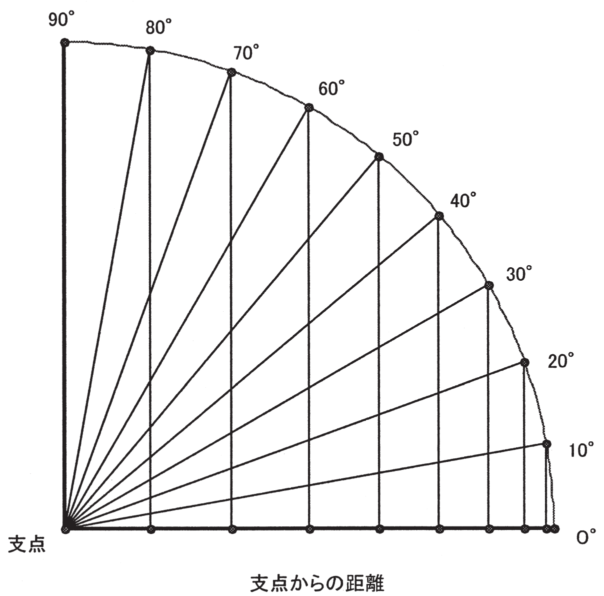
問　1　**Q**で，アームの支点から 7m のところにある荷物を 1m だけ近づけるには，アームの角度は何度から何度にすればよいですか。

これらのことから，荷物の位置によって，アームの角度が異なることがわかります。しかも，荷物を 1m ひき寄せるとき，角度の変化は一定ではありません。

Q　アームの角度はどのように変化しているのでしょうか。縮図をかいて，下の表をうめてみましょう。

荷物の位置 (m)	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
アームの角度(度)			37	46						

実際には，クレーンの操縦士は，アームの角度を見ながら操作します。そこで，アームの角度に注目して，角度を変化させたときのアームの支点から荷物までの距離の変化を下の図から調べてみると，次のようになります。

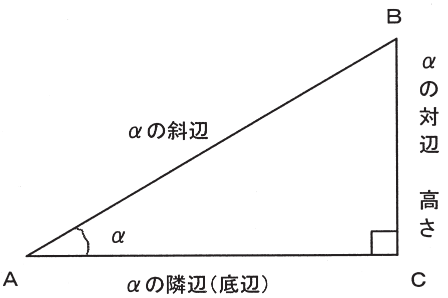


角度 (度)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
支点からの距離 (m)	10	9.8	9.4	8.7	7.7	6.4	5.0	3.4	1.7	0

アームの角度を固定し，アームの長さを変化させると

$$\frac{\text{支点からの距離}}{\text{アームの長さ}}$$

の値は一定です。



αの値が決まれば，隣辺の斜辺に対する比の値 $\frac{AC}{AB}$ はつねに一定です。

この値をαの**余弦**，またはαの**コサイン**といい，**cosα** と表します。cosαは「コサインアルファ」と読みます。

$$\cos\alpha = \frac{\textbf{隣辺}}{\textbf{斜辺}}$$

▶▶アームの角度によって，アームの先端の高さはどうなるでしょうか。

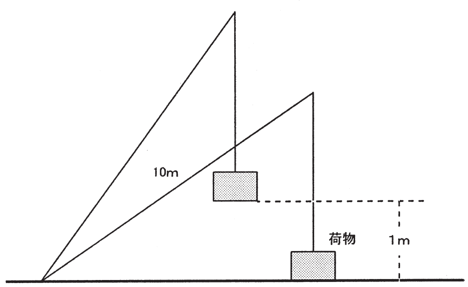
前ページの図からアームの先端の高さを調べると，次のような表になります。

角度　(度)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
先端の高さ　(m)	0	1.7	3.4	5.0	6.4	7.7	8.7	9.4	9.8	10

また，アームの角度を固定し，アームの長さを変化させると，次の値も一定です。

$$\frac{\text{アームの先端の高さ}}{\text{アームの長さ}}$$

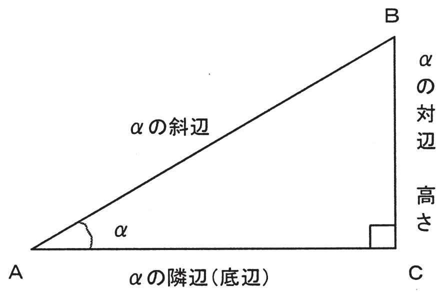
Q 右の図のようにクレーン車のアームの長さが 10m のとき，荷物がアームの支点から 8m のところに置いてあります。この荷物を上に 1m だけ上げるには，アームの角度をどれだけにすればよいでしょうか。縮図をかいて求めてみましょう。



右の図で，αの値が決まれば，対辺の斜辺に対する比の値$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$はつねに一定です。

この値をαの**正弦**，またはαの**サイン**といい，**sinα**と表します。

sinαは「サインアルファ」と読みます。

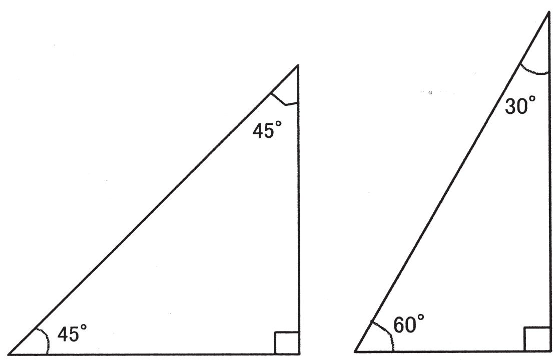


$$\sin\alpha = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$$

問 2 **Q**で，荷物を 3m だけ真上に持ち上げるには，アームの角度をどのくらいにすればよいですか。また，荷物を，最初に置いてある場所の真上に 3m だけ持ち上げるには，クレーン車は何 m 前へ進めばよいですか。

30°，45°，60°の正接，正弦および余弦の値は，特別な直角三角形の辺の比を利用して，下の図から求めることができます。

問 3 30°，45°，60°の正接，正弦および余弦の値を右の図を利用して求め，表の空らんにその値を記入しなさい。



A	正接 tan$A$	正弦 sin$A$	余弦 cos$A$
45°			
60°			
30°			

▶▶ $0^\circ \leqq A \leqq 90^\circ$ で，大まかに $\sin A$ と $\cos A$ の値の変化を見てみましょう。

Q 141，142 ページの表から，右の表のそれぞれの角の $\sin A$ と $\cos A$ の値を求め，書き入れましょう。
この表で，A の値が 2 倍，3 倍になると，$\sin A$ と $\cos A$ の値は，それぞれどのように変化しているでしょうか。

A	$\sin A$	$\cos A$
0°		
10°		
20°		
30°		
40°		
50°		
60°		
70°		
80°		
90°		

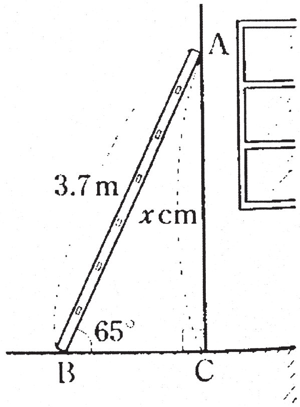
問 4 A の値が 1° ずつ増えていくときの，$\sin A$，$\cos A$ の値をグラフ電卓を利用して求め，右の表に書き入れなさい。

A	$\sin A$	$\cos A$
50°		
51°		
52°		
53°		
54°		
55°		
56°		
57°		
58°		
59°		

問 5 $\sin A$，$\cos A$ は，それぞれ A に比例しているといえますか。

▶▶ タンジェントやサイン，コサインを利用して，いろいろな問題を考えてみましょう。

例 1 長さ3.7mのはしごが建物に立てかけてあります。はしごと地面の作る角は 65°です。はしごは地上何mのところまでとどいていますか。答は小数第1位まで求めなさい。



<解> 地面からの高さACを x mとすれば

$$\sin 65^\circ = \frac{x}{3.7}$$

したがって　$x = 3.7 \times \sin 65^\circ$

$= 3.7 \times 0.9063$

$= 3.35 \cdots\cdots$

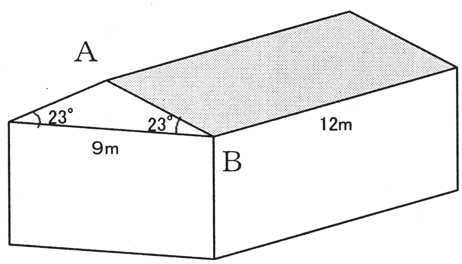
<u>答　3.4m</u>

問 6 上の例で，次の問に答えなさい。

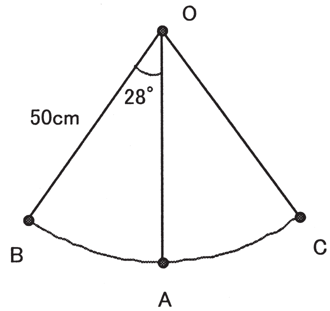
① はしごの下端Bは建物から何mはなれていますか。答は小数第1位まで求めなさい。

② はしごの下端Bを建物から1.2mはなしたとすれば，はしごと地面のつくる角はおよそ何度になりますか。

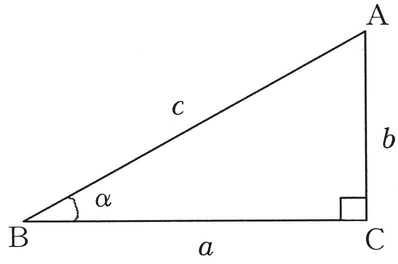
問 7 右の図のような建物があります。屋根の傾きは23°です。この屋根の斜面の長さ(ABの長さ)を求めて，屋根の面積を$1m^2$の位まで計算しなさい。



問 8 長さ50cmの振り子が，鉛直方向から左右へ28°ずつ振れています。振り子のおもりがもっとも高く振れる位置は，もっとも低い位置より何cm高いですか。



$\boxed{3}$ 三角比の関係



右の図からわかるように

$$\sin\alpha=\frac{b}{c}\ ,\ \cos\alpha=\frac{a}{c}$$

したがって

$$b=c\sin\alpha\ ,\ a=c\cos\alpha$$

また，$\tan\alpha=\dfrac{b}{a}$ であるから

$$\tan\alpha=\frac{c\sin\alpha}{c\cos\alpha}$$

したがって

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

また，△ABC で三平方の定理を利用して

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立ちます。したがって

$$(c\cos\alpha)^2+(c\sin\alpha)^2=c^2$$

$$c^2\sin^2\alpha+c^2\cos^2\alpha=c^2$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

●注意　$\sin\alpha$ や $\cos\alpha$ の2乗は，それぞれ $\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha$ と書きます。

●三角比の関係●

$\boxed{1}$ $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\boxed{2}$ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

これらの公式を利用して，三角比の値を求めてみましょう。

例 1 $\sin\alpha=0.6$ のとき，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ の値をそれぞれ求めなさい。

＜解答＞ 前のページ $\boxed{2}$ の式に $\sin\alpha=0.6$ を代入すると

$$0.6^2+\cos^2\alpha=1$$

したがって

$$\cos^2\alpha=1-0.6^2$$
$$=1-0.36$$
$$=0.64$$

$\cos\alpha>0$ であるから

$$\cos\alpha=0.8$$

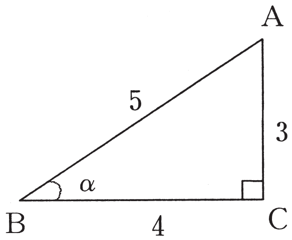
また，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ であるから

$$\tan\alpha=\frac{0.6}{0.8}=0.75$$

答 $\cos\alpha=0.8,\quad \tan\alpha=0.75$

例 1 は，次のように考えて解くこともできます。

＜別解＞ $\sin\alpha=0.6=\dfrac{3}{5}$ ですから，右の図のような直角三角形をつくります。三平方の定理から，角 α の隣辺 BC の長さは 4 となります。



したがって

$$\cos\alpha=\frac{4}{5}=0.8$$

$$\tan\alpha=\frac{3}{4}=0.75$$

問 1 $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ のとき，$\sin\alpha$ と $\tan\alpha$ の値をそれぞれ求めなさい。

② 図形の計量

1 三角形の面積

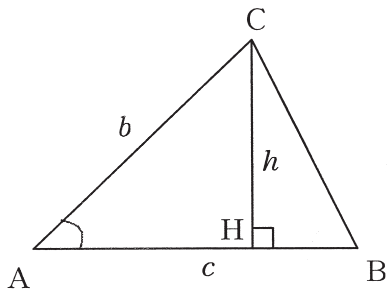
▶▶ △ABC の面積 S を，2 辺とその間の角から求めてみましょう。

右の図で，△ABC の高さを h とすれば，
三角形の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ch$$

で求めることができます。

ここで，$h=b\sin A$ ですから



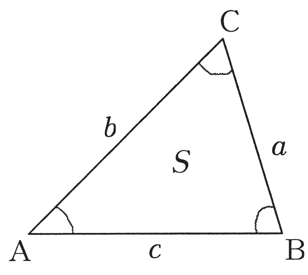
$$S=\frac{1}{2}c\times h=\frac{1}{2}c\times b\sin A$$

$$=\frac{1}{2}bc\sin A$$

他の 2 辺とその間の角からも，同様の公式が得られます。

●三角形の面積●

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

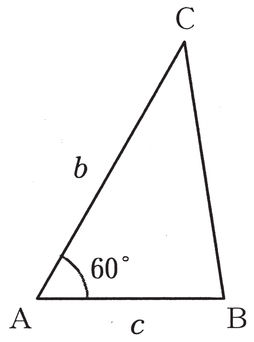


例　1　右の図の △ABC において

$b=8$，$c=5$，$A=60^\circ$

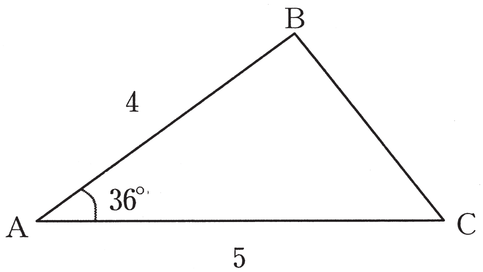
であるから，この三角形の面積Sは

$$S=\frac{1}{2}\times 8\times 5\times \sin 60^\circ = 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$$

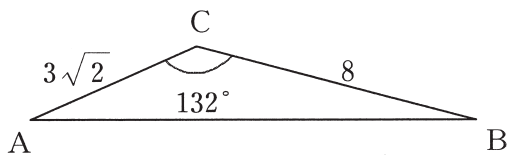


問　1　次の △ABC の面積を求めなさい。ただし，サインの値は，グラフ電卓を使って求めなさい。

①　$b=4$，$c=5$，$A=36^\circ$



②　$a=8$，$b=3\sqrt{2}$，$C=132^\circ$



➲➲問１の①の三角形で，AB と AC の長さは一定にして，A の角度を大きくしていったら，面積はどのように変化していくでしょうか。また，角度を小さくしていったらどうなるでしょうか。

2　正弦定理

▶▶ 三角形の 3 つの角のサインの値と, 3 辺の長さとの間にどんな関係が成り立つか考えてみましょう。

△ABC で，頂点 C から対辺 AB，またはその延長に垂線 CH をひくと

△ACH において

$$\mathrm{CH}=b\sin A$$

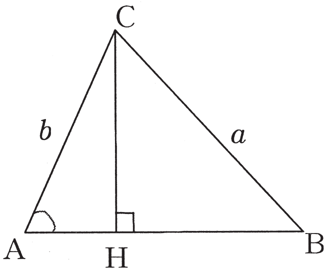
△BCH において

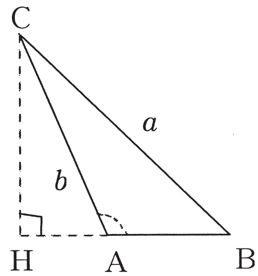
$$\mathrm{CH}=a\sin B$$

ですから

$$b\sin A=a\sin B$$

が成り立つことがわかります。





この両辺を，$\sin A\times\sin B$ でわると

$$\frac{b\sin A}{\sin A\times\sin B}=\frac{a\sin B}{\sin A\times\sin B}$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$$

となります。

同様にして，次の式も成り立つことがわかります。

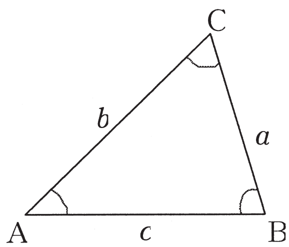
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

したがって，次の関係式が得られます。これを**正弦定理**といいます。

●正弦定理●

△ABC において

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

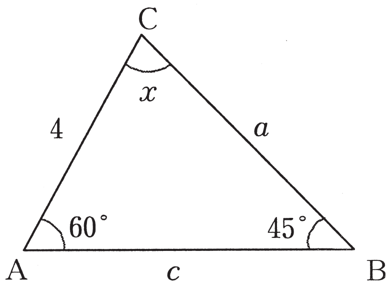


1つの三角形で，2つの角と1つの辺，2つの辺と1つの角がわかれば，正弦定理を使って，残りの辺や角がわかります。

例 1　△ABCで

$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$b=4$

のとき，aの値を求めなさい。



＜解答＞　$\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{4}{\sin 45^\circ}$ より

$$a=\frac{4\times\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

$$a=2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=2\sqrt{6}$$

問 1　例1の図で，xの値とcの値を求めなさい。

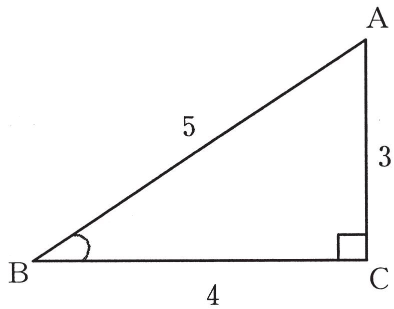
例 2　辺の長さが3，4，5である三角形は直角三角形です。この三角形の直角以外の2つの角の大きさを求めてみましょう。

右の図のような△ABCを考え，まずBを求めてみよう。

$$\frac{5}{\sin 90^\circ}=\frac{3}{\sin B}$$

$$5=\frac{3}{\sin B}$$

$$\sin B=\frac{3}{5}=0.6$$

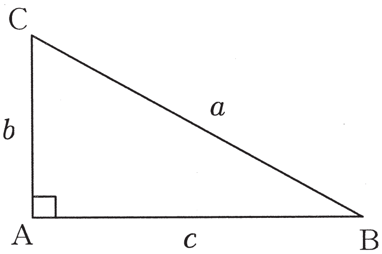


三角比の表でサインの値が0.6になる角度を調べると　$B≒37^\circ$

よって　　$B=37^\circ$

問 2　上と同じ方法で，Aの大きさを求めなさい。

3 余弦定理



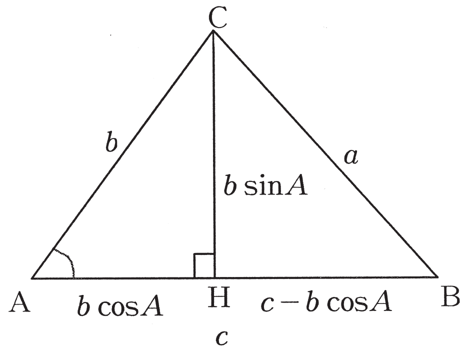
△ABC が直角三角形ならば，三平方の定理が成り立ちます。

たとえば，右の図の直角三角形では

$$a^2=b^2+c^2$$

となります。

それでは，A が $90°$ でないときは，a^2 は b，c を用いてどのように表されるでしょうか。



△ABC において，右の図のように，頂点 C から辺 AB に垂線 CH をひきます。

直角三角形 ACH において，AC$=b$ ですから

$$\mathrm{AH}=b\cos A$$

$$\mathrm{HC}=b\sin A$$

また

$$\mathrm{HB}=\mathrm{AB}-\mathrm{AH}=c-b\cos A$$

直角三角形 BCH において，三平方の定理により

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{HC}^2+\mathrm{HB}^2$$

したがって

$$\begin{aligned}a^2&=\mathrm{HC}^2+\mathrm{HB}^2\\&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2A\\&=b^2(\sin^2A+\cos^2A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

$\sin^2A+\cos^2A=1$

となります。

同じように考えると，次の3つの関係式が得られます。これらをまとめて**余弦定理**といいます。

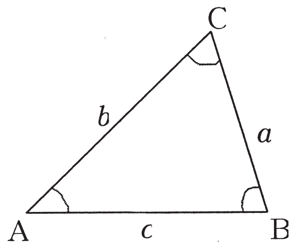
●余弦定理●

△ABC において

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



余弦定理で，$A=90^\circ$ とおくと

$$\cos A=\cos 90^\circ=0$$

より

$$a^2=b^2+c^2$$

となります。これは三平方の定理そのものです。

例　1　△ABC で

$$b=8,\ c=5,\ A=60^\circ$$

のとき，a の値を求めなさい。

<解答>　余弦定理から

$$\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A \\ &=8^2+5^2-2\times 8\times 5\times\cos 60^\circ \\ &=64+25-80\times\frac{1}{2} \\ &=49 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから　　$a=7$

問　1　三角形の3辺が，5，6，7のとき，3つの角の大きさをすべて求めなさい。

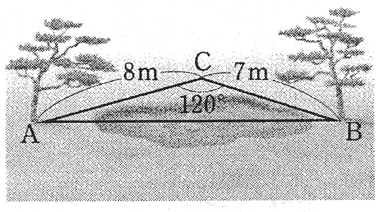
4 三角比の利用

▶▶ 三角比の関係を利用して，いろいろな問題を考えてみましょう。

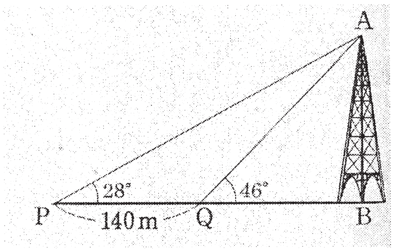
問 1 右の図で，池の両側にある松の木の間の距離 AB を求めるのに, A 地点から図のように C 地点を通って B 地点に行きました。

AC＝8m，CB＝7m，C＝120°

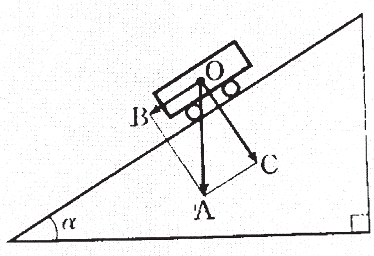
のとき，距離 AB を求めなさい。



問 2 右の図のように，ある地点 P から塔の頂点 A を見上げたら, 仰角が 28° で，そこから塔の方向へ 140m 進んだ地点 Q での仰角が 46° でした。目の高さは考えないことにして，塔の高さ AB を 1 m の位まで求めなさい。



問 3 右の図のように，水平面と α の傾きをもつ斜面に物体を置き，その物体に加わる重力を矢印の線分 OA で表します。このとき，OA は, 斜面に平行な力(矢印の線分 OB)と垂直な力(矢印の線分 OC)とに分解されます。



このとき，次の 2 つの式が成り立ちます。

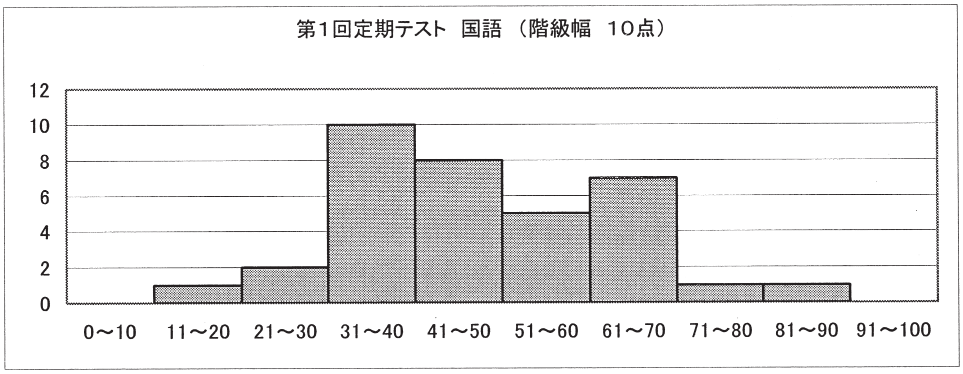
$$OB = OA\sin\alpha,\quad OC = OA\cos\alpha$$

① これらの式が成り立つことを証明しなさい。

② 10kg の物体を水平面との傾きが 25° の斜面に置くとき，それにはたらく斜面に平行な力と垂直な力をそれぞれ求めなさい。

第7単元

資料の分析



第1回定期テスト 国語 （階級幅 10点）
12
10
8
6
4
2
0
0～10
11～20
21～30
31～40
41～50
51～60
61～70
71～80
81～90
91～100

① 資料の分析

下の表は，ある中学校３年Ａ組35名の第１回定期テストの結果です。

A組	第1回定期テスト　得点					
氏名	国語	社会	数学	理科	英語	合計
A−01	66	76	58	76	78	354
A−02	58	59	53	39	48	257
A−03	32	92	48	78	67	317
A−04	58	58	46	38	59	259
A−05	82	87	78	79	77	403
A−06	31	42	30	13	8	124
A−07	62	88	66	69	69	354
A−08	24	38	33	16	14	125
A−09	47	49	46	34	49	225
A−10	37	78	43	18	41	217
A−11	66	98	64	90	66	384
A−12	58	78	67	67	61	331
A−13	34	26	51	17	30	158
A−14	60	74	55	61	65	315
A−15	42	52	55	31	28	208
A−16	75	96	98	90	99	458
A−17	41	66	39	25	28	199
A−18	33	41	64	31	21	190
A−19	33	45	45	41	4	168
A−20	46	48	61	57	85	297
A−21	38	60	28	16	20	162
A−22	37	46	52	41	12	188
A−23	45	38	21	16	11	131
A−24	60	94	61	76	79	370
A−25	49	78	63	69	74	333
A−26	64	49	58	45	61	277
A−27	69	85	61	66	77	358
A−28	44	36	37	31	39	187
A−29	26	46	49	18	56	195
A−30	39	73	51	31	43	237
A−31	61	67	55	61	77	321
A−32	70	97	77	78	84	406
A−33	15	14	49	12	12	102
A−34	40	47	19	29	11	146
A−35	42	51	46	36	30	205

前ページの表から，「A－02」の生徒の結果は，次の通りです。

氏名	国語	社会	数学	理科	英語	合計
A－02	58	59	53	39	48	257

Q あなたがもし「A－02」の生徒だとしたら，このテストの結果をどのように受け止めますか。

「A－02」の生徒は，この結果から，自分の得点について次のように考えました。

- 英語はほぼ半分ぐらいとれている。
- 国語と社会に比べて，数学と理科ができていない。
- 文化系の教科に比べて，理科系の教科が苦手だから，今度は数学と理科で頑張らなければいけない。

Q この生徒が考えたことは，本当に正しいといえるのでしょうか。あなたはどう考えますか。あなたの考えをいってみましょう。

ここでは，「A－02」の生徒の結果やテストの成績全体を，いろいろな視点でとらえていくことにします。

1 平均

「A－02」の生徒が考えたことは，得点だけ見れば確かに言えることかも知れませんが，各教科のテスト問題の難易度についてはまったく考慮に入れていません。つまり，点数が低くても，難しい問題だったとすれば判断のしかたも変わるでしょう。

異なる複数の資料を比較する場合に，もっとも一般的に用いられるものの1つに**平均**があります。平均は，個々のデータの合計を全体の個数でわった値です。たとえば，クラスの国語の得点の平均を求めるとしたら，クラスの 35 人全員の国語の得点を合計し，35 でわって求めます。

問 1 A組の各教科と 5 教科の合計の平均を，小数第 2 位を四捨五入して，小数第1位まで求めなさい。

A 組の「各教科」および「5 教科の合計」の平均は，次のようになります。

	国語	社会	数学	理科	英語	5 教科の合計
平均	48.1	62.1	52.2	45.6	48.1	256.0

この結果と「A－02」の生徒の結果を比較することにより，たとえば次のようなことがいえます。

・国語の平均は社会の平均と比べて約 14 点も低いから，国語のテストは社会のテストより難しかったといえる。したがって，「A－02」の生徒の得点は国語が 58 点，社会が 59 点でほぼ同じだけれど，国語は比較的よくできていた結果だと判断できる。

問 2 「A－02」の生徒の結果を平均点と比較した場合，ほかにどんなことが言えますか。あなたの考えをまとめなさい。

2　度数分布表・ヒストグラム

平均からは，各教科の難しさの比較をすることができます。しかし，各教科について，学級全体の傾向はわかりにくいものです。そこで，全体の傾向がわかりやすくなるように，資料を整理してみる方法について考えてみましょう。

全体の傾向をわかりやすくする方法の 1 つとして，得点を一定の幅に区切って，それぞれの範囲にふくまれる人数を表すことがあります。このようにしてつくった表を**度数分布表**といいます。度数分布表の１つ１つの区切りを**階級**といい，それぞれの階級に含まれる個数（この場合は人数）を**度数**といいます。

A組の第 1 回定期テストの結果について，階級の幅を 4 通りに変えて度数分布表をつくると，次のようになります。

階級幅 50 点の表

階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～50	21	14	15	21	18
51～100	14	21	20	14	17
合計	35	35	35	35	35

階級幅 25 点の表

階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～25	2	1	2	9	9
26～50	19	13	13	12	9
51～75	13	9	17	7	9
76～100	1	12	3	7	8
合計	35	35	35	35	35

階級幅 10 点の表

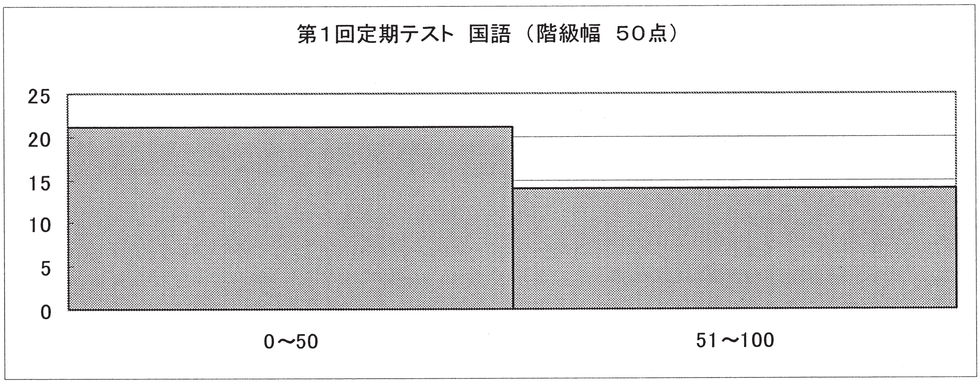
階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～10	0	0	0	0	2
11～20	1	1	1	8	6
21～30	2	1	3	2	5
31～40	10	3	3	8	1
41～50	8	9	8	3	4
51～60	5	5	9	1	2
61～70	7	2	8	6	6
71～80	1	6	2	5	6
81～90	1	3	0	2	2
91～100	0	5	1	0	1
合計	35	35	35	35	35

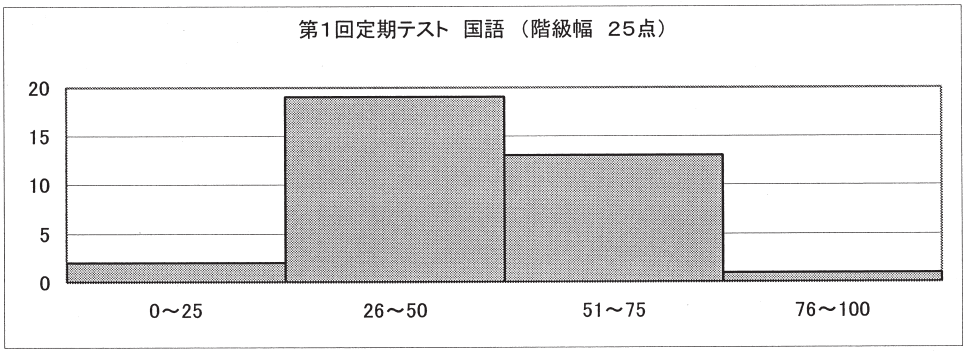
階級幅 5 点の表

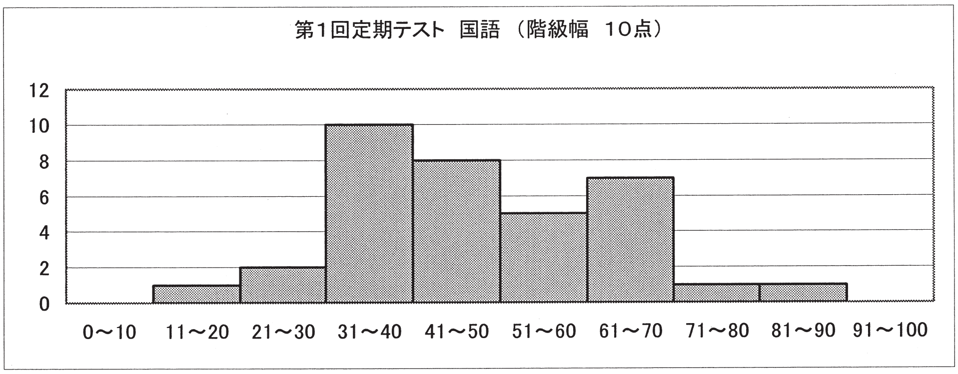
階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～5	0	0	0	0	1
6～10	0	0	0	0	1
11～15	1	1	0	2	5
16～20	0	0	1	6	1
21～25	1	0	1	1	1
26～30	1	1	2	1	4
30～35	5	0	1	5	0
36～40	5	3	2	3	1
41～45	5	3	2	3	2
46～50	3	6	6	0	2
51～55	0	2	7	0	0
56～60	5	3	2	1	2
61～65	3	0	6	2	3
66～70	4	2	2	4	3
71～75	1	2	0	0	1
76～80	0	4	2	5	5
81～85	1	1	0	0	2
86～90	0	2	0	2	0
91～95	0	2	0	0	0
96～100	0	3	1	0	1
合計	35	35	35	35	35

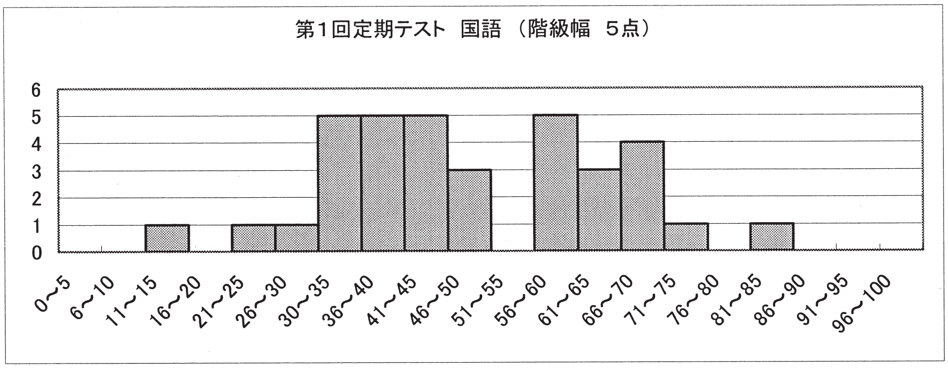
問　1　前ページの度数分布表を見て，階級の幅はどれくらいにすることが適当だと考えますか。

全体の傾向をさらにわかりやすくするために，度数分布表にもとづいて柱状のグラフに表すことがあります。これを**ヒストグラム**(柱状グラフ)といいます。国語の結果を先に示した 4 種類の度数分布表をもとにヒストグラムに表すと，それぞれ次のようになります。









問　2　4つのヒストグラムを比較して，全体の傾向を読み取るにはどのヒストグラムが適切と考えますか。あなたの意見をいいなさい。

これらを見ると，階級の幅は大きすぎれば全体の傾向はわからず，かといって小さすぎてもかえって全体の傾向はわかりづらくなります。この資料の場合は，10点ぐらいの幅が適当だと考えられるでしょう。

計算処理のしやすさなどから，階級の幅を10点にすることが一般的ですが，コンピュータを使えば簡単に階級の幅をさまざまに変えながらヒストグラムをつくることができます。実際に階級の幅をさまざまに変えてみると，全体の傾向がもっとわかりやすいヒストグラムが見つかるかもしれません。

■度数分布表を利用して平均を求めること

度数分布表では，個々の生徒の得点はわかりませんが，各階級にふくまれる生徒の得点を，その階級のちょうど真ん中の値だと仮定すると，ある程度正確な平均を求めることができます。この真ん中の値を**階級値**といいます。階級値を用いて平均を求める手順は次のようになります。

$\boxed{1}$　各階級の階級値を求め，各階級に属する生徒の得点を，その階級の階級値だと仮定する。

$\boxed{2}$　各階級の階級値と度数の積を求め，さらにその合計を求める。これを，全生徒の得点の合計と考える。

$\boxed{3}$　$\boxed{2}$で求めた値を，度数の合計（生徒の総数）でわる。

前ページの方法で，国語の平均を求めてみると

階級値と度数の積の合計は1665点

これを35でわって　$1665 \div 35 \fallingdotseq 47.6$

となります。実際の平均点は 48.1 点なので，小数第1位を四捨五入するといずれも 48 点となり，度数分布表からもかなり正確な値が得られることがわかります。

階級	階級値	国語（度数）	階級値×度数
0～10	5	0	0
11～20	15	1	15
21～30	25	2	50
31～40	35	10	350
41～50	45	8	360
51～60	55	5	275
61～70	65	7	455
71～80	75	1	75
81～90	85	1	85
91～100	95	0	0
合計		35	1665

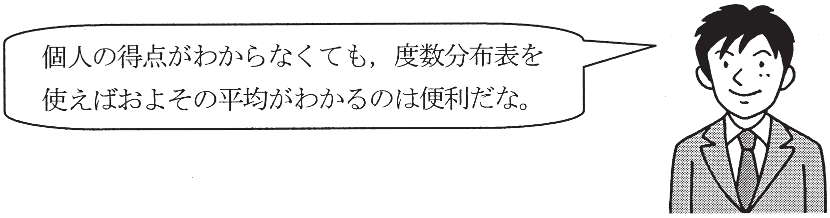
問　3　国語以外の教科について，度数分布表から平均を求め，実際の平均と比較しなさい。

階級	階級値	社会（度数）	階級値×度数
0～10	5	0	
11～20	15	1	
21～30	25	1	
31～40	35	3	
41～50	45	9	
51～60	55	5	
61～70	65	2	
71～80	75	6	
81～90	85	3	
91～100	95	5	
合計		35	

階級	階級値	数学（度数）	階級値×度数
0～10	5	0	
11～20	15	1	
21～30	25	3	
31～40	35	3	
41～50	45	8	
51～60	55	9	
61～70	65	8	
71～80	75	2	
81～90	85	0	
91～100	95	1	
合計		35	

階級	階級値	理科（度数）	階級値×度数
0～10	5	0	
11～20	15	8	
21～30	25	2	
31～40	35	8	
41～50	45	3	
51～60	55	1	
61～70	65	6	
71～80	75	5	
81～90	85	2	
91～100	95	0	
合計		35	

階級	階級値	英語（度数）	階級値×度数
0～10	5	2	
11～20	15	6	
21～30	25	5	
31～40	35	1	
41～50	45	4	
51～60	55	2	
61～70	65	6	
71～80	75	6	
81～90	85	2	
91～100	95	1	
合計		35	



■コンピュータ※を使って調べてみよう

大量のデータを分析する場合，一つ一つ数えたり，表を書いたりするのは，とても大変な作業になります。こんなとき，コンピュータを使うと便利です。

「表計算ソフト」と呼ばれるソフト（たとえば Excel など）を使うと，テスト結果一覧表から度数分布表を簡単に作成することができます。

▶▶A 組の第 1 回定期テストの結果について，Excel を使って階級の幅をさまざまに変えながら，度数分布表とヒストグラムをつくり，比較してみましょう。

国語の度数分布表は，次の手順で作成することができます。

《度数分布表の作成》

1. データ区間を設定する。これは，階級が区切られる得点を示す。
2. 度数を表示したい範囲を指定する。
3. 関数「FREQUENCY」を選択する。
4. データ範囲として国語の得点全て（一覧表の中で国語の得点が示されている部分）を選択する。
5. 続いて，データ区間を選択する。
6. 最後に，ctrl＋shift を押しながら，OK ボタン（または Enter）を押す。

国語以外の教科も，この手順と同じことをくり返します。

※詳しい操作方法は，ソフトの解説書などを参考にしましょう。

また，ヒストグラムは，次の手順で作成することができます。

《ヒストグラムの作成》

1 ヒストグラムに表したいデータの部分を指定する。

2 グラフ作成のアイコンをクリックする。

3 データ区間を項目軸に，度数を数値軸にとってグラフ化する。

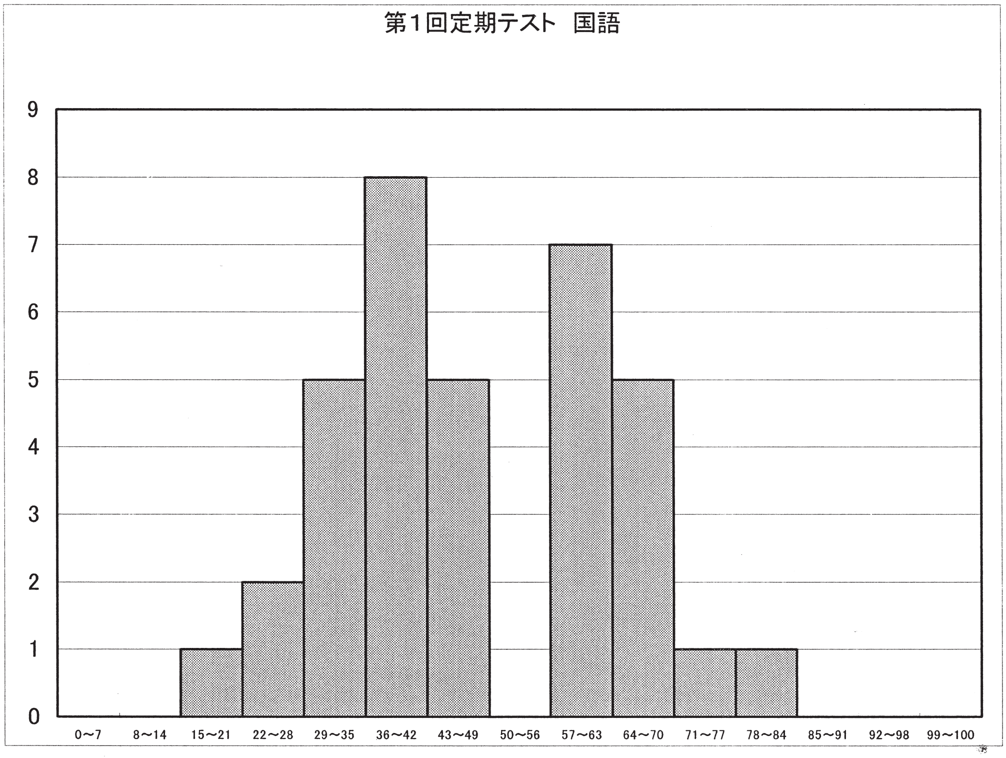
4 設定オプションで，棒の間隔を0にする。

例 1 A組の第1回定期テストの結果について，Excelを使って階級の幅が7点の度数分布表とヒストグラムを作成すると，次のようになります。

度数分布表

階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～7	0	0	0	0	1
8～14	0	1	0	2	6
15～21	1	0	2	6	2
22～28	2	1	1	1	2
29～35	5	0	2	6	2
36～42	8	5	2	5	2
43～49	5	7	8	1	3
50～56	0	2	7	0	1
57～63	7	3	6	3	3
64～70	5	2	4	4	4
71～77	1	3	1	2	4
78～84	1	3	1	3	3
85～91	0	3	0	2	1
92～98	0	5	1	0	0
99～100	0	0	0	0	1
合計	35	35	35	35	35

ヒストグラム



このテスト結果の場合は，階級の幅が 10 点の場合のヒストグラムより，むしろ 7 点の場合のほうが全体の傾向がわかりやすくなります。

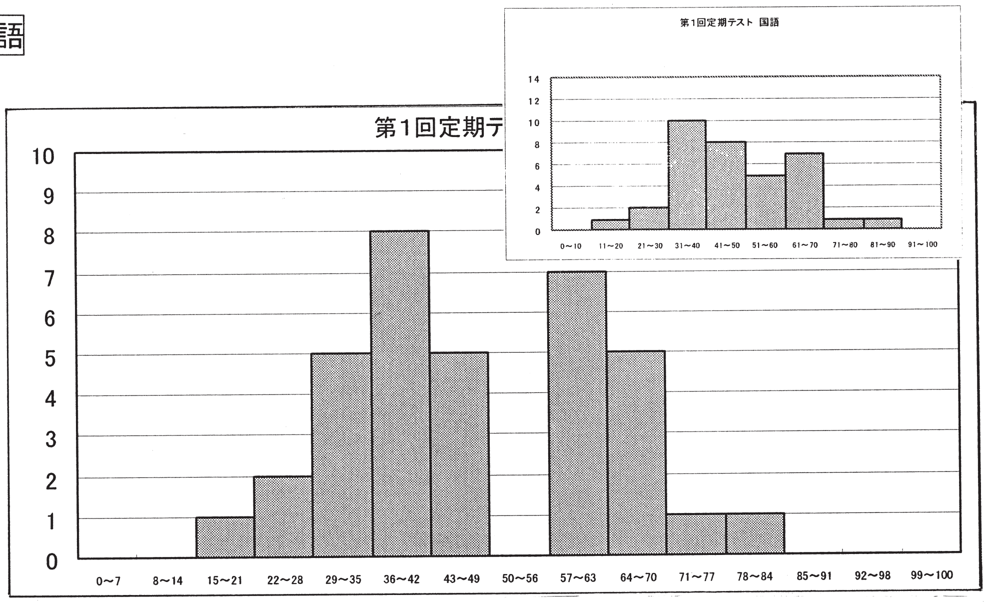
このように，階級の幅はコンピュータを使うと，データの区切りを変えることによって簡単に変更できます。また，均等の幅でなくてもかまいません。

階級の幅をさまざまに変えながら，度数分布表やヒストグラムがどのように変化するか，調べてみましょう。

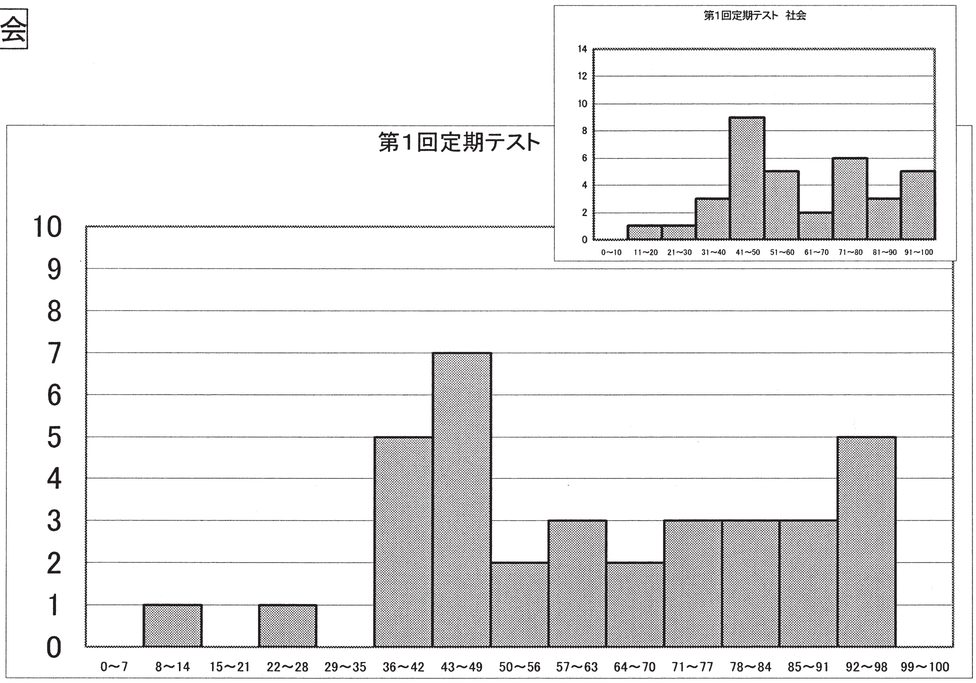
第 1 回定期テストのそれぞれの教科の結果について，階級の幅を 7 点にした場合のヒストグラムは次のようになります。

問　4　下のヒストグラムで，右上の小さいヒストグラムは階級の幅を 10 点にした場合のヒストグラムです。それぞれの教科ごとに，階級の幅を 7 点にした場合と，10 点にした場合のヒストグラムを比較して，わかることをいいなさい。

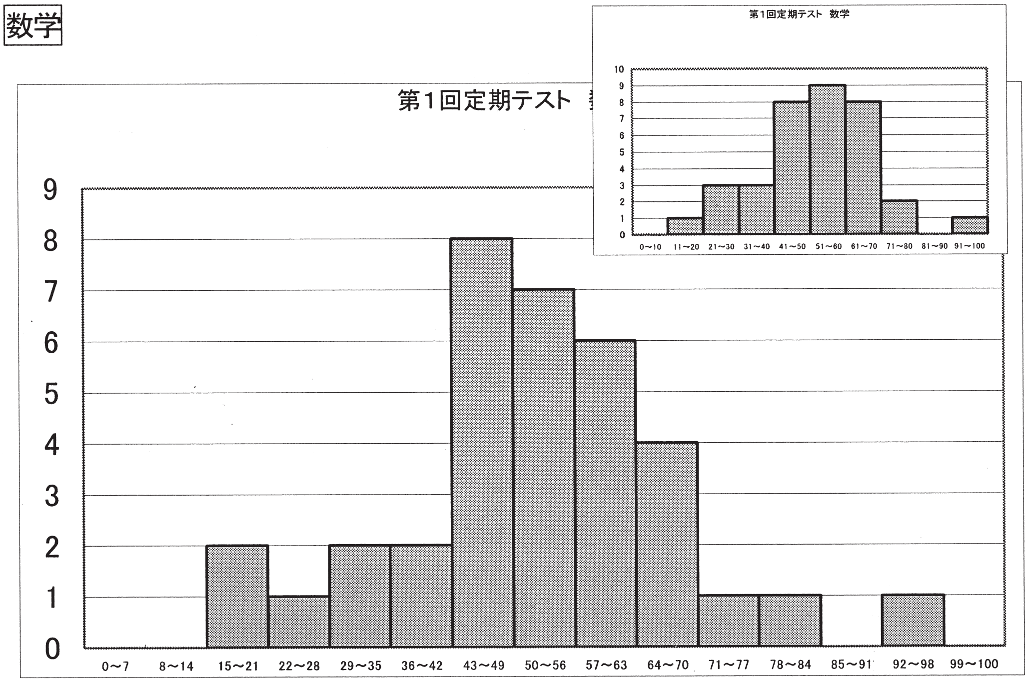
国語



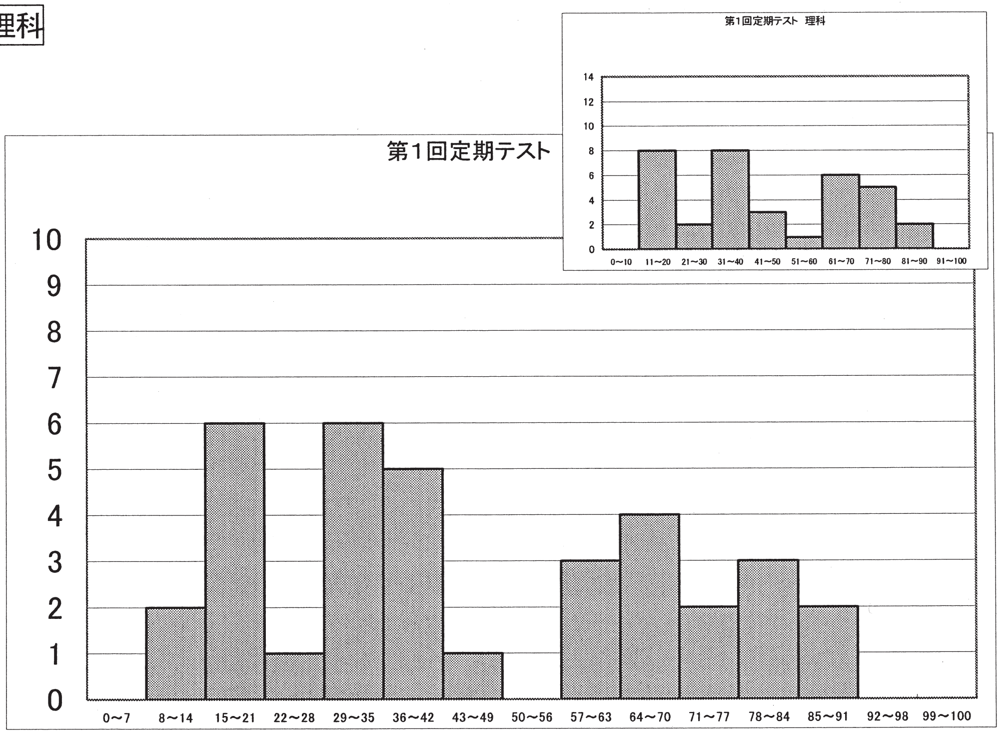
社会



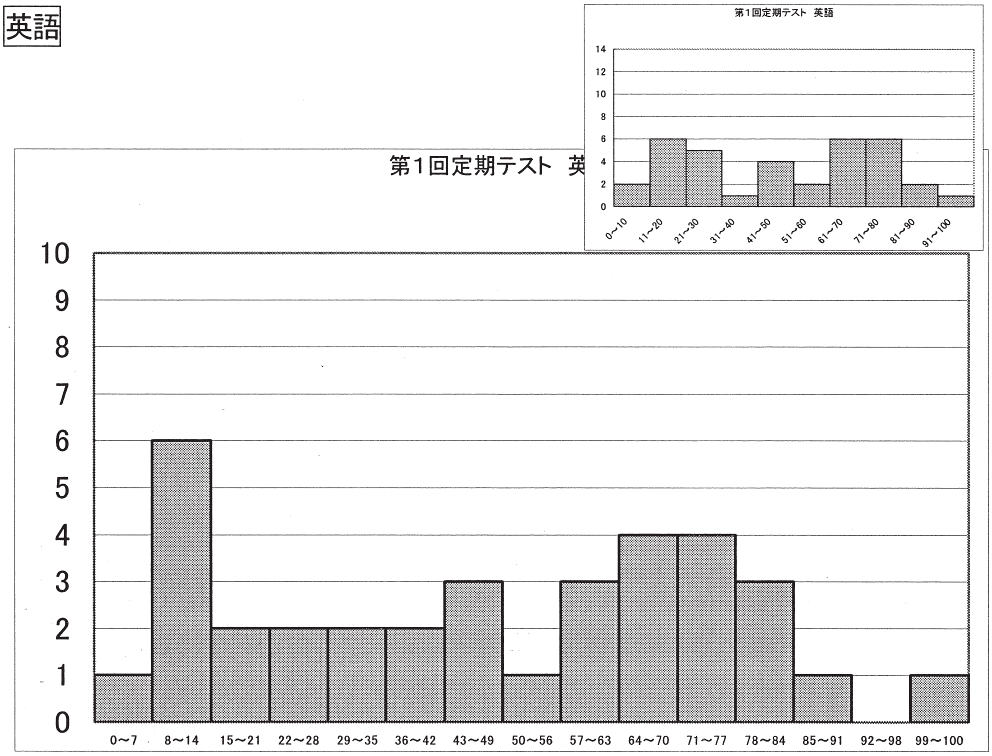
数学


第1回定期テスト 数学
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0～10
11～20
21～30
31～40
41～50
51～60
61～70
71～80
81～90
91～100
第1回定期テスト
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
0～7
8～14
15～21
22～28
29～35
36～42
43～49
50～56
57～63
64～70
71～77
78～84
85～91
92～98
99～100

理科


第1回定期テスト 理科
0
2
4
6
8
10
12
14
0～10
11～20
21～30
31～40
41～50
51～60
61～70
71～80
81～90
91～100
第1回定期テスト
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
0～7
8～14
15～21
22～28
29～35
36～42
43～49
50～56
57～63
64～70
71～77
78～84
85～91
92～98
99～100

英語



ヒストグラムに表すと，全体の傾向がさらにとらえやすくなり，たとえば次のようなことがいえます。

・国語と英語の平均点はほぼ同じ（国語 47.9 点，英語 48.1 点）だが，国語は平均点近辺に生徒が多くいるのに対し，英語は広い範囲に散らばっている。

問　5　5 教科のヒストグラムを比較し，それぞれどんな傾向があるか，気づいたことをまとめなさい。

3 メジアン・モード

「A－02」の生徒の国語のテスト結果について，学級内の順位を考慮してとらえたら，どのように考察できるでしょうか。

個人のテストの出来具合を考える場合，平均点で比較することのほかに，全体の中での順位を考えることがあります。

国語の得点を，得点の高い順に並べかえると右のようになります。このように並べかえた場合，ちょうど真ん中にくる点数を基準に比較することもできます。この数値を**「メジアン」**（中央値）といいます。A 組は 35 人なので，得点順で 18 番目である「A－23」の生徒の 45 点がメジアンになります。

順位	氏名	国語	順位	氏名	国語
1	A－05	82	19	A－28	44
2	A－16	75	20	A－15	42
3	A－32	70		A－35	42
4	A－27	69	22	A－17	41
5	A－01	66	23	A－34	40
	A－11	66	24	A－30	39
7	A－26	64	25	A－21	38
8	A－07	62	26	A－10	37
9	A－31	61		A－22	37
10	A－14	60	28	A－13	34
	A－24	60	29	A－18	33
12	A－02	58		A－19	33
	A－04	58	31	A－03	32
	A－12	58	32	A－06	31
15	A－25	48	33	A－29	26
16	A－09	47	34	A－08	24
17	A－20	46	35	A－33	15
18	A－23	45			

モード（最頻値）

メジアン（中央値）

また，度数がもっとも多い値を**「モード」**（最頻値）といいます。A組の国語のモードは 58 点で，度数は 3 人になります。

●**注意**　度数の総数が偶数の場合，中央にくる 2 つの数値の平均をメジアンとします。

問　1　「A－02」の生徒の国語のテスト結果について，メジアンとモードと比較して，いえることを述べなさい。

「理科のテスト結果について，国語と同じように，メジアンとモードを調べてみましょう。

右の表は，第 1 回定期テストの理科の結果を得点順に並べ替えたものです。この表から，メジアン，モードは次のようになります。また，平均は 45.6 点です。

順位	氏名	理科	順位	氏名	理科
1	A－11	90	19	A－04	38
	A－16	90	20	A－35	36
3	A－05	79	21	A－09	34
4	A－03	78	22	A－15	31
	A－32	78		A－18	31
6	A－01	76		A－28	31
	A－24	76		A－30	31
8	A－07	69	26	A－34	29
	A－25	69	27	A－17	25
10	A－12	67	28	A－10	18
11	A－27	66		A－29	18
12	A－14	61	30	A－13	17
	A－31	61	31	A－08	16
14	A－20	57		A－21	16
15	A－26	45		A－23	16
16	A－19	41	34	A－06	13
	A－22	41	35	A－33	12
18	A－02	39	←メジアン（中央値）		

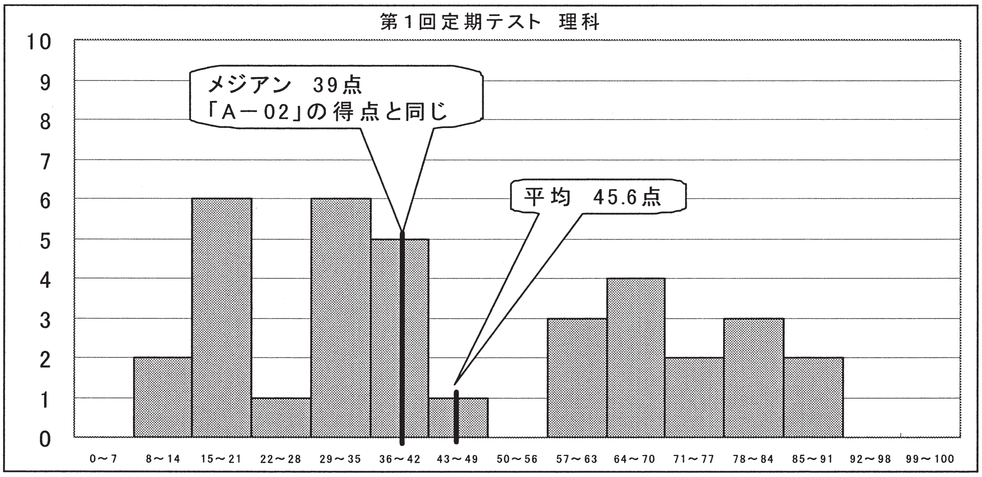
メジアン	39 点
モード	31 点
平均	45. 6 点

平均と比べて，メジアンは 6.6 点も低くなっています。これは，理科のヒストグラムから，次の傾向が見られることからもわかります。

・得点が低い範囲では，比較的狭い範囲に人数がかたよっていること

・得点が高い範囲では，比較的広い範囲に人数が散らばっていること

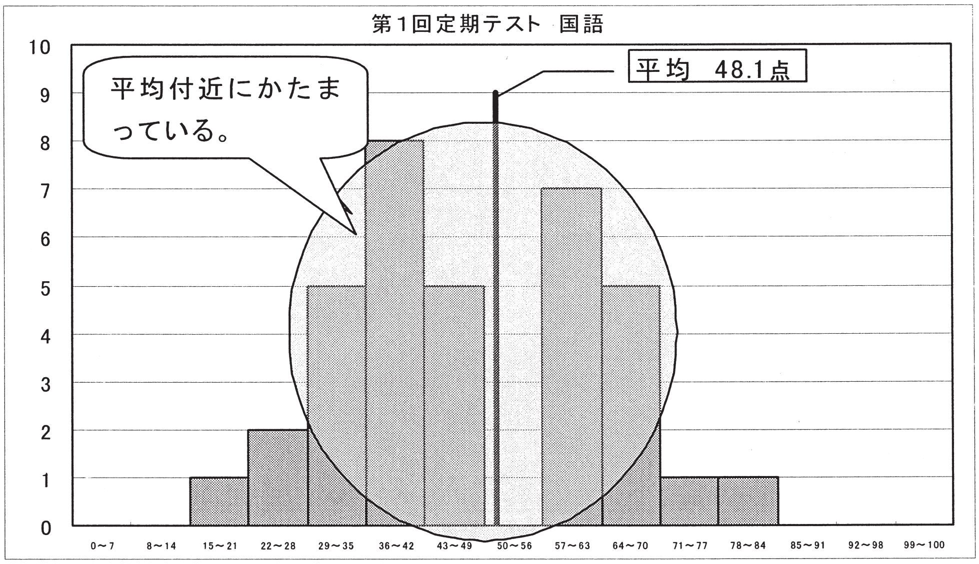
「A－02」の生徒は，平均点と比べれば得点は低いのですが，メジアンの値と同じなので，真ん中の得点をとっていると見ることもできます。

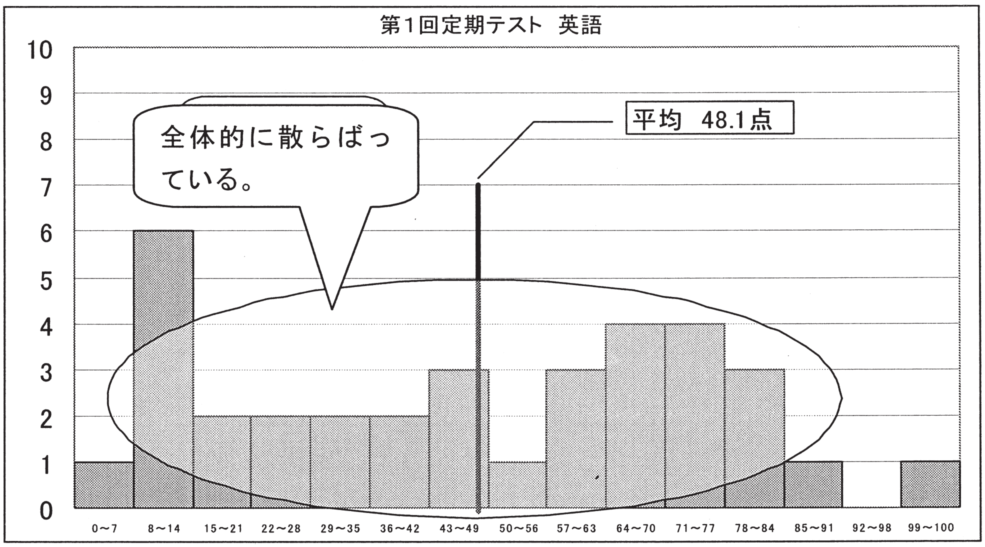


4 偏差・分散・標準偏差

平均といっても，どうやら万能ではなさそうです。それは，得点の散らばりかたの違いによる影響が反映されていないからです。

下の図は，第 1 回定期テストの国語と英語のヒストグラムです。国語と英語の平均点はいずれも 48.1 点ですが，ヒストグラムを比較すると得点の散らばり方に違いがあります。また，国語は比較的平均点付近にかたまっていますが，英語は全体的に散らばっていることがわかります。





▶▶ヒストグラムを見れば視覚的におよその傾向はわかりますが，散らばり方のちがいを数値で表すことができれば，ちがいをはっきり示すことができます。その方法について考えてみましょう。

平均点付近にどの程度固まっているのかについては，個々の生徒の得点と平均点との差を求めることによって数値化して表す方法が考えられます。

個々の生徒の国語と英語の得点について

得点－平均　……(ア)

(ア)の２乗　……(イ)

を求め，比較してみましょう。

国語について調べると，右のようになります。計算結果にもとづいて(イ)の平均を求めると

247.0　……　(1)

になります。この数値は，個々の生徒の得点と平均点との差から導き出された値なので，この値が小さいほうが平均点付近に集まっていると判断することができ，広範囲に散らばるにつれて(1)の値も大きくなるといえます。

(イ)は２乗した値なので，広範囲に散らばれば散らばるほど(1)の値はどんどん大きくなってしまいます。そこで，最終的に(1)の正の平方根を求めて散らばり具合を表すこともあります。

氏名	国語	得点－平均 (ア)	(ア)の2乗 (イ)
A-01	66	17.9	320.4
A-02	58	9.9	98.0
A-03	32	−16.1	259.2
A-04	58	9.9	98.0
A-05	82	33.9	1149.2
A-06	31	−17.1	292.4
A-07	62	13.9	193.2
A-08	24	−24.1	580.8
A-09	47	−1.1	1.2
A-10	37	−11.1	123.2
A-11	66	17.9	320.4
A-12	58	9.9	98.0
A-13	34	−14.1	198.8
A-14	60	11.9	141.6
A-15	42	−6.1	37.2
A-16	75	26.9	723.6
A-17	41	−7.1	50.4
A-18	33	−15.1	228.0
A-19	33	−15.1	228.0
A-20	46	−2.1	4.4
A-21	38	−10.1	102.0
A-22	37	−11.1	123.2
A-23	45	−3.1	9.6
A-24	60	11.9	141.6
A-25	49	0.9	0.8
A-26	64	15.9	252.8
A-27	69	20.9	436.8
A-28	44	−4.1	16.8
A-29	26	−22.1	488.4
A-30	39	−9.1	82.8
A-31	61	12.9	166.4
A-32	70	21.9	479.6
A-33	15	−33.1	1095.6
A-34	40	−8.1	65.6
A-35	42	−6.1	37.2
平均	48.1	0.0	247.0

国語の場合は

$$\sqrt{247.0} \fallingdotseq 15.7 \quad \cdots\cdots \quad (2)$$

になります。

変量(各生徒の得点)から変量の平均をひいた値(ア)を，**平均値からの偏差**，または単に**偏差**といいます。また，偏差を 2 乗した(イ)の値の平均値(1)を，変量(各生徒の得点)の**分散**といいます。さらに，分散の正の平方根(2)を，変量(各生徒の得点)の**標準偏差**といいます。

問 1 英語の得点について，国語と同じようにして，分散と標準偏差を求めなさい。また，国語の結果と比較して，どのようなことがいえるか述べなさい。

■コンピュータを使って考えてみよう

標準偏差も，表計算ソフト(Excel)を使うと，簡単に求めることができます。その方法は，次の通りです。

1. 標準偏差を表示したいセルを選択する。
2. 関数「STDEVP」を選択する。
3. もとになるデータを選択し，OKボタン(またはEnter)を押す。

なお，平均を求める場合には，関数「AVERAGE」を用いて，同様な処理を行います。

5 偏差値

次に示す得点は，「A－11」の生徒のもので，国語と英語の得点がいずれも66点です。

氏名	国語	社会	数学	理科	英語	合計
A－11	66点	98点	64点	90点	66点	384点

国語と英語の平均は，いずれも 48.1 点でしたから，平均点との比較だけで考えると，この生徒の国語と英語の力は相対的にみて同じだと考えられます。しかし，先に示したヒストグラムでは，それぞれの度数分布のばらつき具合が異なっていましたので，このばらつき具合を考慮して判断する必要がありそうです。

そこで，このようなばらつきを整えて評価するために考えられたものが**偏差値**です。偏差値は，次の式で求めることができます。

$$偏差値 = 50 + 10 \times \frac{得点 - 平均点}{標準偏差}$$

この式によれば，得点が平均点と一致すると 50 になることがわかります。つまり，偏差値とは，平均点が何点であっても，その得点を 50 点と考えてバランスを整えた数値といえます。

国語と英語の分散と標準偏差は，右の通りです。これらを用いて「A－11」の生徒の国語の偏差値を求めると，次のようになります。

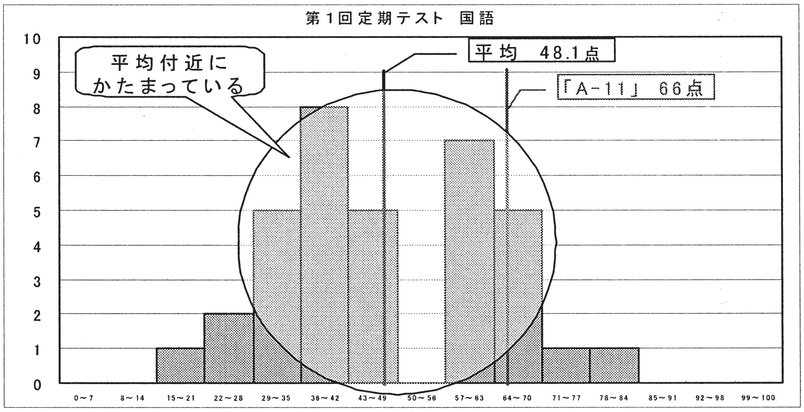
	国語	英語
平均	48.1	48.1
分散	247.0	725.8
標準偏差	15.7	26.9

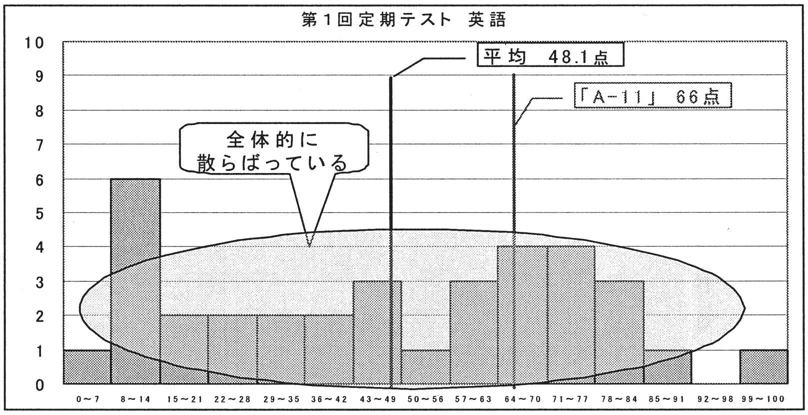
$$50 + 10 \times \frac{66 - 48.1}{15.7} \fallingdotseq 61.4$$

問 1　「A－11」の生徒の英語の偏差値を求めなさい。

平均点が同じテストで，得点も同じであっても，度数のばらつき具合の違いによって偏差値は異なります。「A－11」の生徒は，国語の偏差値がおよそ 61.4，英語の偏差値がおよそ 56.7 であることから，相対的に考えて国語のほうが英語よりも力があると判断できます。また，ヒストグラムによれば，国語は英語に比べて平均点付近の階級の度数が高いことがわかります。つまり，同じ 66 点であっても，国語のほうが平均よりも抜き出ていると考えられるわけで，そのことが数値として表されているのです。

標準偏差を求めると，偏差値を求めることができるから，試験結果のばらつきに関わりなく評価したり，異なる教科間で比較したりすることができるんだ。都合がいいね。





一般に，平均から標準偏差の値だけはなれた値を上限，下限とする範囲の中に，全体のおよそ 60％のデータがふくまれます。

6　母集団・標本・標本調査

A 組の 35 人が受けたテストは，同じ市内にある中学校 3 学年で一斉に行われたもので，テストを受けた生徒の合計は 2168 人だったそうです。他の学校のテスト結果はわかりませんが，全体の傾向を知ることはできないでしょうか。

これまで A 組について考えてきましたが，市内全体のおよその傾向をA組の資料から推定することはできないか考えてみましょう。

階級の幅を 50 点とした場合，A組の生徒の合計得点の度数分布表は右のようになります。この表から，市内全体のようすを推定するにはどうすればよいでしょうか。

階級	階級値	A組人数(度数)
0～50	25	0
51～100	75	0
101～150	125	5
151～200	175	8
201～250	225	5
251～300	275	4
301～350	325	5
351～400	375	5
401～450	425	2
451～500	475	1
合計		35

人数(度数)の合計が 35 なので，これを 2168 だと仮定したら，それぞれの階級にふくまれる度数はどうなるかを求めればよさそうです。

そのためには，各階級の度数をすべて$\frac{2168}{35}$倍すればよいでしょう。

■コンピュータを使って考えてみよう

A組の度数分布表の各階級の度数をすべて$\frac{2168}{35}$倍するには，Excel を使うと簡単にできます。その方法は，次の通りです。

1. $\frac{2168}{35}$倍した数値を表示したいセルを選択する。
2. もとになるデータが示されているセルを指定し，
   =[元データのセル]＊2168/35 となるように入力する。※
3. 他のセルについても同様に入力する。

※コピー機能を使うと，同じ計算式を簡単に入力することができます。

この手順によって，市内全体の傾向を推定するために度数分布表を作成すると，右のようになります。

階級	階級値	A組人数（度数）	市内推定人数
0～50	25	0	0
51～100	75	0	0
101～150	125	5	310
151～200	175	8	496
201～250	225	5	310
251～300	275	4	248
301～350	325	5	310
351～400	375	5	310
401～450	425	2	124
451～500	475	1	62
合計		35	2168

市内全体の傾向を推定するために，その資料の一部から全体を推定する方法をとりました。全体の集まりが大きな数になる場合は，とても都合のよい方法です。

このような場合，全体の集まりを**母集団**，そこから取り出した一部を**標本**といいます。また，標本について調べることを**標本調査**といいます。

なお，可能な限り全部の資料について調査する方法を**全数調査**といいます。国勢調査は全数調査です。

問　1　上で行った，市内全体の傾向を推定する調査では，母集団と標本は何ですか。

7 相対度数

これまで，A 組の中だけで考えてきましたが，学年全体との比較をする方法を考えてみましょう。

この学年の生徒数は 190 人で，学年の生徒の得点はすべてわかります。しかし，比べようとする集団の人数が異なるので，各階級の人数をそのまま比較することはできません。

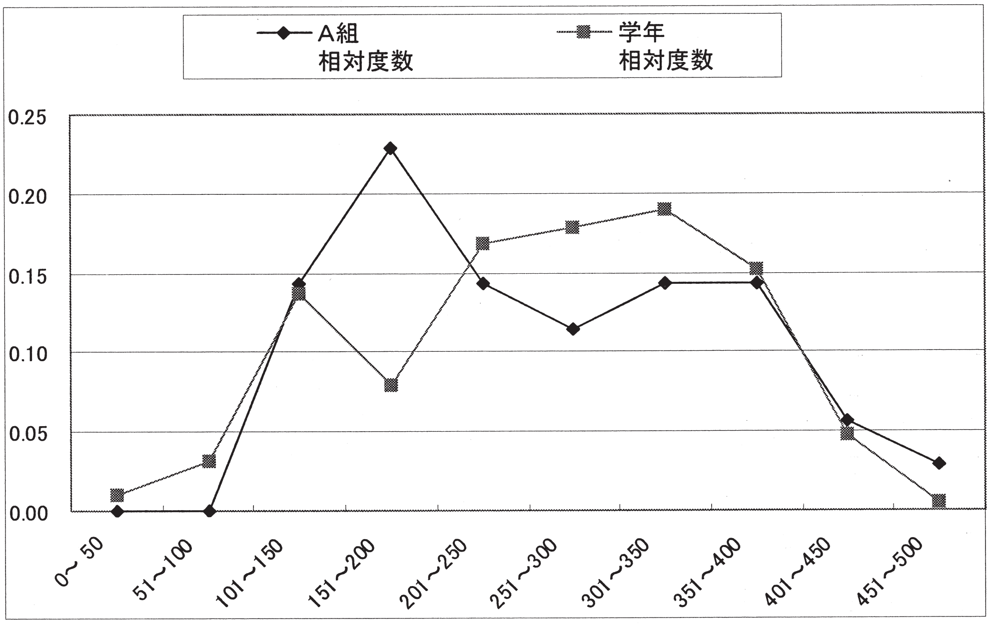
そこで，1 つの工夫として，度数の合計を 1 とみて，各階級にふくまれる度数を相対的な大きさで表した**相対度数**で比較する方法があります。

階級	階級値	A組 度数	A組 相対度数	学年 度数	学年 相対度数
0～ 50	25	0	0.00	2	0.01
51～100	75	0	0.00	6	0.03
101～150	125	5	0.14	26	0.14
151～200	175	8	0.23	15	0.08
201～250	225	5	0.14	32	0.17
251～300	275	4	0.11	34	0.18
301～350	325	5	0.14	36	0.19
351～400	375	5	0.14	29	0.15
401～450	425	2	0.06	9	0.05
451～500	475	1	0.03	1	0.01
合計		35	1.00	190	1.00

上の表は，それぞれの相対度数をふくんだ度数分布表です。相対度数そのものを比較してもよいのですが，次ページのようなグラフにするとさらにわかりやすくなります。

このときもコンピュータを使って，相対度数のグラフをかくことができます。

階級，A 組相対度数，学年相対度数を選択して，折れ線グラフに表します。



▶▶このグラフから，A 組のテスト結果は，学年全体のテスト結果と比べてどのような特徴があるか考えてみましょう。

例えば，次のようなことがわかります。

・学年全体と比べて A 組は，151 点～200 点に属する生徒の割合が大きい。

問 1 グラフから，上のこと以外にどのようなことが読み取れますか。

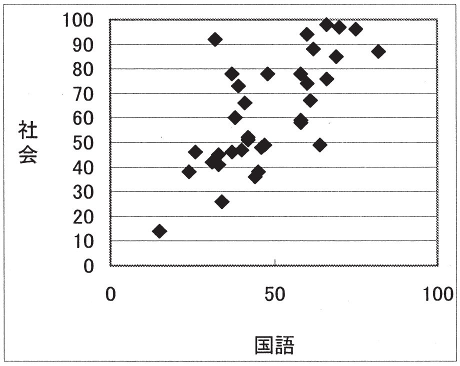
問 2 度数分布表を用いて，A 組の平均点と学年の平均点を求め，比較しなさい。また，比較していえることをまとめなさい。

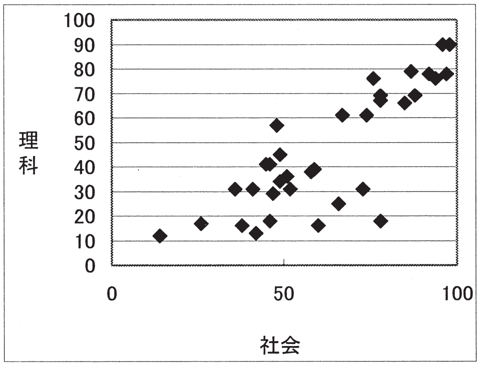
8 相関

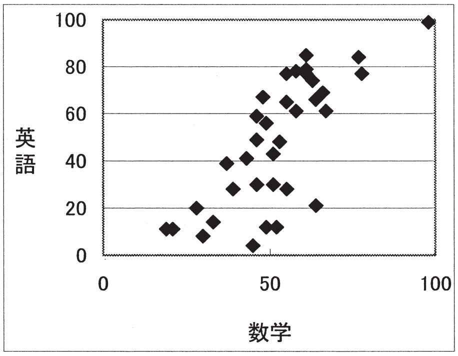
Q 「数学ができる人は，他の教科の成績もいいの？」

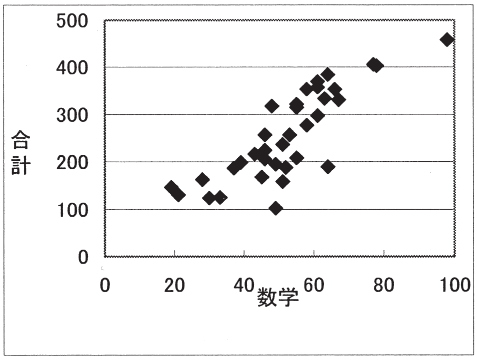
こんな質問をされたら，あなたはどう答えますか。

いくつかの教科について，おたがいの得点の関係がどのようになっているのか調べるために，A 組のテスト結果にもとづいてグラフに表してみました。



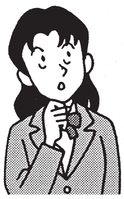






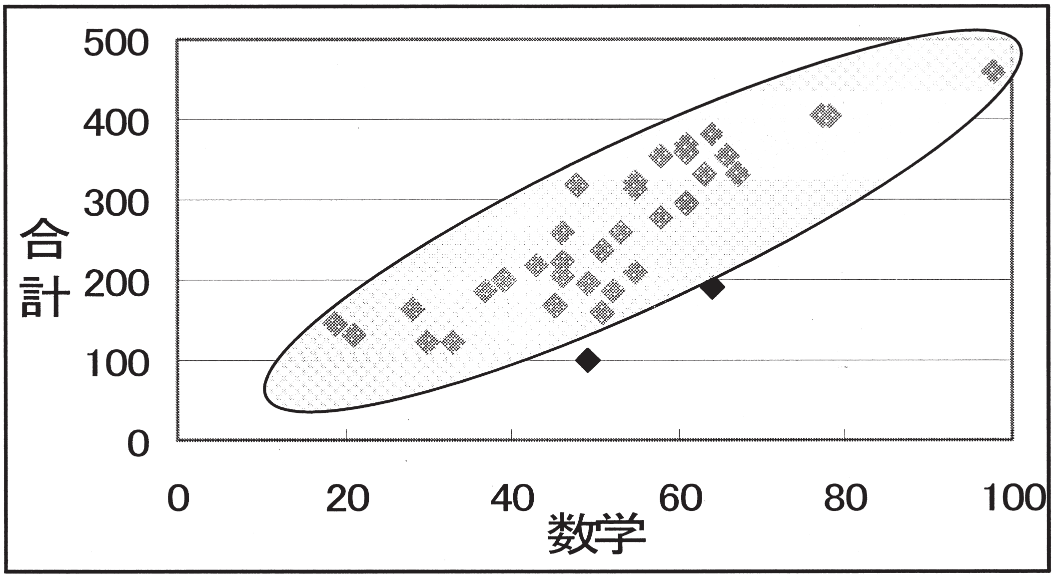
このように，2 つの項目についての関係はどのようにとらえられるかを調べるために，座標平面上にデータを点で表した図を**相関図**といいます。点の散らばり方によって，相関の強さがわかります。特に，右上がりの傾向が認められるように集まっている場合は，正の相関があるといい，右下がりの傾向が認められるように集まっている場合は，負の相関があるといいます。

問　1　A さんは，前ページの「合計と数学の相関図」をみて，次のように考えました。



数学ができる人は，合計点も高い傾向がありそうね。「正の相関が比較的強い」感じがする。だからといって数学だけ勉強していればほかもできるということになるのかな…！？

あなたは，前ページに示した 4 つの相関図を見て，どのように考えますか。また，A さんの考えをどう思いますか



💻 やってみよう

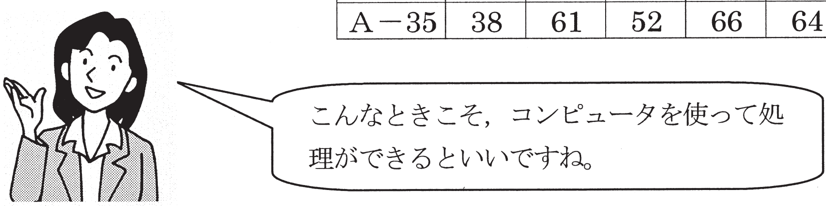
右の表は，第２回定期テストの３年Ａ組35名の結果です。この表にもとづいて，これまでに学習したことを使って，次にあげる視点にそって分析してみましょう。

① 各教科の度数分布表とヒストグラムを作成する。

② 分散や標準偏差を求めて，得点の散らばり具合を比較する。

③ 特定の生徒（たとえば「Ａ－02」）について，第１回の結果と比較して，どんなことがいえるかまとめる。

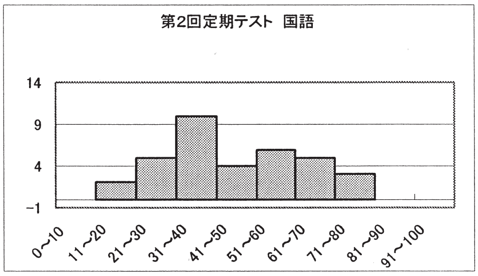
Ａ組	第２回定期テスト					
氏名	国語	社会	数学	理科	英語	合計
Ａ－01	61	91	80	91	100	423
Ａ－02	57	45	60	59	54	275
Ａ－03	52	83	57	84	88	364
Ａ－04	43	67	42	52	68	272
Ａ－05	71	82	82	92	77	404
Ａ－06	20	33	24	31	43	151
Ａ－07	74	88	62	77	86	387
Ａ－08	21	18	26	32	26	123
Ａ－09	38	60	45	83	64	290
Ａ－10	40	57	53	60	60	270
Ａ－11	66	90	59	85	85	385
Ａ－12	56	75	44	79	75	329
Ａ－13	33	50	41	56	63	243
Ａ－14	63	49	77	96	85	370
Ａ－15	34	50	36	53	49	222
Ａ－16	63	90	100	89	92	434
Ａ－17	30	40	51	53	46	220
Ａ－18	28	43	68	73	51	263
Ａ－19	36	39	54	90	20	239
Ａ－20	49	62	85	73	96	365
Ａ－21	35	76	29	45	60	245
Ａ－22	46	71	75	84	60	336
Ａ－23	25	30	32	35	48	170
Ａ－24	55	76	64	100	82	377
Ａ－25	54	81	89	80	81	385
Ａ－26	51	79	44	58	74	306
Ａ－27	63	72	83	76	76	370
Ａ－28	40	47	32	68	82	269
Ａ－29	21	58	62	56	72	269
Ａ－30	39	71	53	42	56	261
Ａ－31	48	81	86	83	84	382
Ａ－32	76	88	78	92	92	426
Ａ－33	19	17	45	25	45	151
Ａ－34	37	70	31	37	28	203
Ａ－35	38	61	52	66	64	281

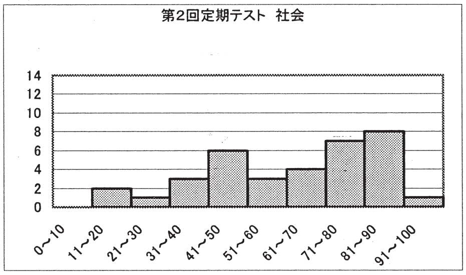


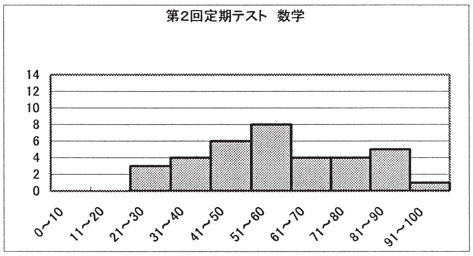
第２回定期テストのＡ組の結果について，各教科ごとに度数分布表に表すと，右のようになります。

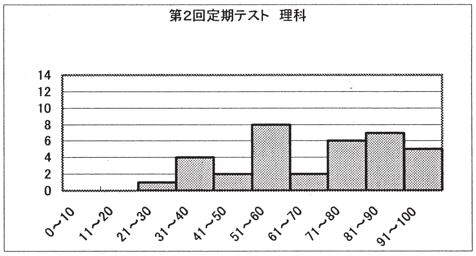
また，階級の幅を 10 点として，各教科のヒストグラムをつくると，下の図のようになります。

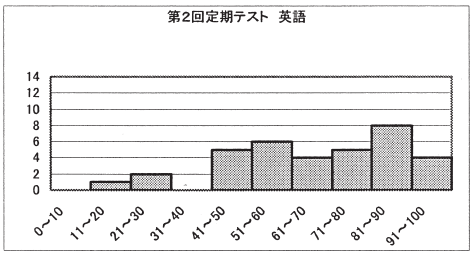
階級	国語	社会	数学	理科	英語
0～10	0	0	0	0	0
11～20	2	2	0	0	1
21～30	5	1	3	1	2
31～40	10	3	4	4	0
41～50	4	6	6	2	5
51～60	6	3	8	8	6
61～70	5	4	4	2	4
71～80	3	7	4	6	5
81～90	0	8	5	7	8
91～100	0	1	1	5	4
合計	35	35	35	35	35

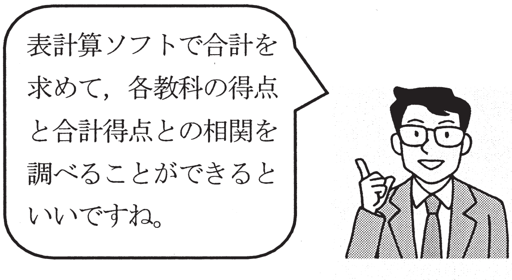












第２回定期テストについて，Ａ組と学年全体の平均点は次のようになります。

	国語	社会	数学	理科	英語	合計
A組	45.2	62.6	57.2	67.3	66.6	298.9
学年	44.9	63.8	49.4	69.3	62.7	284.6

編集委員	杉山吉茂	東京学芸大学
	吉川行雄	山梨大学
	渡邊公夫	早稲田大学
	藤井斉亮	東京学芸大学
	中村享史	山梨大学
	清水美憲	筑波大学
執筆者 中学校	新井　仁	長野市立柳町中学校
	清水宏幸	山梨大学附属中学校
	本田千春	東京学芸大学附属国際中等教育学校
	森　　聖	埼玉県新座市立第二中学校
高等学校	植野美穂	東京学芸大学附属国際中等教育学校
	高橋　均	東京大学附属中等教育学校
	高橋広明	東京学芸大学附属国際中等教育学校
	西村圭一	東京学芸大学附属国際中等教育学校
	細矢和博	東京大学附属中等教育学校
小学校	石井勝博	埼玉県ふじみ野市立みずほ台小学校
	市川　啓	埼玉県ふじみ野市立西原小学校
	榎本　崇	埼玉県ふじみ野市駒西小学校
	笠井健一	東京都日野市立日野第七小学校
	佐々木千穂	東京都千代田区立番町小学校
	杉田博之	成城学園初等学校
	高橋恵美子	東京都東久留米市第二小学校
	高橋丈夫	東京学芸大学附属小金井小学校
	田端輝彦	宮城教育大学教育学部
	土屋利美	埼玉県狭山市立入間川小学校
	長島寛和	東京学芸大学附属小金井小学校
	中野博之	弘前大学教育学部
	早川　健	山梨県甲府市立新田小学校
	山田剛史	東京学芸大学附属竹早小学校
	亘理史子	東京都目黒区立原町小学校