はじめに

私達は，平成 10 年の学習指導要領の改訂で算数・数学の内容が 3 割削減されたのを憂い，「我が国の望ましい算数・数学のカリキュラム」の開発を思い立ち，日本教材文化研究財団のご好意とご協力を得て，平成 12 年からカリキュラムの研究・開発に当たり，平成 14 年にその案を発表した。その後，平成 15 年からは，そのカリキュラムを具体化する教科書の執筆活動にもご協力をいただいてきた。さらに，今回，東京書籍のご好意も得て，ここに教科書の形で発表することができるようになった。日本教材文化研究財団と東京書籍に心から感謝するとともに，本教科書の作成にご協力いただいた多くの方々にも心から感謝の意を表する次第である。

本教科書シリーズの特色

本教科書の作成にあたっては，次のことに心掛けた。

1．数学を利用する能力と態度の育成

これからは，これまで以上に数学を利用する機会が増え，数学を用いて事象を数理的にとらえ，そこにある問題を適切に処理できる能力と態度を身につけることが欠かせない社会になる。そうした社会では，すべての子どもが数学を活用して現実世界の様々な事象を表現し，その仕組みを解明し，数学を用いて予想したり問題解決を行ったりすることができるような算数・数学教育をすることが求められる。このようなことはこれまでも言われてきたことではあるが，これまでの算数・数学の指導は，まず数学の理解をはかり，技能を習熟させ，そのあと数学を用いて問題を解決させるという形，つまり，数学の理解→応用という形で行なわれてきたが，そのような応用は数学の理解や習熟の程度を試すためと考えられ，数学が役に立つという意識を育てられないできた。

本教科書では，身の回りの問題を数学を用いて解決することを中心にするとともに，数学の有用性が分かるようにするため，まず，解決したい問題を提示し，その解決に必要な数学を学んで問題を解決することを通して，数学を用いることによって問題が解決できたという気持ちが生まれるようにした。

そうしない単元では，数学を学ぶ必然性が分かるような展開を工夫した。

2．教える数学のレベルの向上

身の回りにある問題を数学を用いて解決できるためには，事象を数学的に表現し処理するために必要な三角関数や指数関数などのいろいろな関数，微分・積分の基礎までを身につけていることが必要であると考え，高校１年までにそれらをすべての生徒が学習できるようにした。

3．テクノロジーの活用

グラフ電卓やパソコンなどのテクノロジーを適切に活用し，計算などの技能の習熟に必要な時間を少なくすると同時に，これまで処理できなかった計算をしたり，手で書けなかったグラフを描かせたりすることなどによって，解決できる問題の幅を拡げるようにした。

4．単元構成

学習の効率等を考え，単元の構成をこれまでと変えたところがある。たとえば，小学校では，これまで小数と分数の学習は別々の単元で学習してきたが，本教科書シリーズでは，小数と分数を関連づけて学ばせるため，小数と分数を同じ単元で学習させるようにした。中学校では，これまで方程式と関数は単元が分けられ，方程式→関数の順序であったが，関数の単元の中に方程式を含めて学習できるようにした。

（編集代表　杉山吉茂）

中学校編の特色

日常事象や自然現象を数理的に把握し数学を積極的に用いて問題を解決する活動や，数学を創造的・発展的に学習できるようにすることを通して，数学のよさ，数学の学習の楽しさが感じられるようにした。

1．日常の具体的な事象を数理的に把握することに重点をおいたが，単元によっては，具体的な事象からでなく，数学的な必然性をもった課題を解決することを通して数学を発展的・創造的に学習できるようにし，数学が発展的に作られることが分かるような展開を工夫した。

2．具体的な事象を数理的に考察する活動を重視するため生のデータを用いることにしたので，グラフ電卓などのテクノロジーを活用することにした。これらを活用することにより，表，グラフを容易に描くこともでき，それらを活用して数量関係に関わる多くの問題に答えることに役立てることもできる。

3．これまで，方程式と関数は単元が分けられ，方程式→関数の順序で学習が進められてきたが，関数の単元の中に方程式・不等式を含め，日常事象や自然現象の中に関数を認め，その関数を利用して問題を解決する際方程式が必要となるという場面を作って方程式の学習をするようにした。

4．高校で三角関数を学習することにしたので，三角比の学習を中学３年に位置づけた。

目次

第1単元

剰余系

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

① カレンダーのしくみ

1 何曜日かな？

Q ある年の 1 月 1 日は月曜日でした。この年の 12 月 31 日は何曜日でしょうか。ただし，この年はうるう年ではないとします。

1月

日	月	火	水	木	金	土
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

カレンダーは数が規則正しく並んでいます。このしくみに着目して，上の問題を考えてみましょう。

1 年は 365 日です。1 週間は 7 日間ですから，365 を 7 でわると

$$365 \div 7 = 52 \quad \text{あまり } 1$$

となります。

あまりが 1 日でるということは，12 月 31 日が，1 月 1 日から数えて 52 週間後の次の日ということです。

上の**Q**で考えている年は月曜日から始まるので, 52 週間後の最終日は日曜日です。したがって，12 月 31 日は日曜日の次の日ですから月曜日になります。

問 1 **Q**で考えた年について，自分の誕生日など，好きな月日を思い浮かべ，その年のその日が何曜日か求めてみなさい。

Q　カレンダーで，今年の，5 月 5 日(子どもの日)，7 月 7 日(七夕)，11 月 3 日(文化の日)は，それぞれ何曜日かを調べてみましょう。

同じ曜日になるのは，どんな秘密がかくれているからでしょうか。

最初の**Q**のときと同じように，1 月 1 日が月曜日で，うるう年ではないとして考えてみましょう。

1 月 1 日から 5 月 5 日までの日数は

31＋28＋31＋30＋5＝125（日）

であり，125 を 7 でわると

125÷7＝17　あまり 6

となります。この年は月曜日から始まるので，17 週間後の最終日は日曜日です。したがって，5 月 5 日は日曜日の 6 日後ですから土曜日になります。

また，1 月 1 日から 7 月 7 日までの日数は

31＋28＋31＋30＋31＋30＋7＝188（日）

であり，188 を 7 でわると

188÷7＝26　あまり 6

となります。

問 2　1 月 1 日から 11 月 3 日までの日数を求め，7 でわりなさい。

1 月 1 日から 5 月 5 日，7 月 7 日，11 月 3 日までのそれぞれの日数を求めて 7 でわると，あまりがすべて 6 になります。

したがって，それらの日の曜日は，日曜日から 6 日後ですから土曜日ということになります。

これらのことから，あまりが同じ日は曜日が同じになります。すなわち，わり算のあまりが曜日を表している，ということがわかります。

問　3　右のカレンダーで，日づけの数を7でわったとき，あまりが6の日は何曜日になっていますか。また，ほかの曜日のときは，あまりはいくつになっていますか。

日	月	火	水	木	金	土
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31				

このように，7でわったときのあまりに着目することによって，整数はあまりが0から6までの7種類に類別できます。それらの数の集まりをそれぞれ0，1，2，3，4，5，6で代表させ，このような数の集まりを

$$Z_7\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

と表すことにします。

$Z_7\{0\}=\{0,\ 7,\ 14,\ \cdots\}$
$Z_7\{1\}=\{1,\ 8,\ 15,\ \cdots\}$
$Z_7\{2\}=\{2,\ 9,\ 16,\ \cdots\}$
$Z_7\{3\}=\{3,\ 10,\ 17,\ \cdots\}$
$Z_7\{4\}=\{4,\ 11,\ 18,\ \cdots\}$
$Z_7\{5\}=\{5,\ 12,\ 19,\ \cdots\}$
$Z_7\{6\}=\{6,\ 13,\ 20,\ \cdots\}$

こうすると，最初の**Q**は次のように考えることもできます。

1月1日はZ_7の集合で考えると，$Z_7\{1\}$にあたります。12月31日は365日後なので

$$365=7\times52+1$$

となり，12月31日も$Z_7\{1\}$の集合に入ることがわかります。

この年の1月1日が月曜日ですから，Z_7での$Z_7\{1\}$は，月曜日にあたります。したがって，12月31日も月曜日であることがわかります。

問　4　次の数は，Z_7でどの集合に入りますか。

①　25　　②　49　　③　65　　④　72

$\boxed{2}$ 集合 Z_7 における計算

Z_7 のなかでの加法について考えてみましょう。

問 1 Z_7 のなかでの加法の結果を，下の表にまとめなさい。

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

問 2 問 1 の表を使って，Z_7 のなかで $5+3$，$3+4$ の計算をしなさい。

問 3 集合 Z_7 のなかで，$2+2=4$ であることから，$4-2$ の値を求めなさい。

では，$2-4$ はどう考えたらよいでしょうか。差 $a-b$ は $x+b=a$ をみたす x の値ですから，$2-4$ の値は，$\square+4=2$ の$\square$にあてはまる数です。

Q 何に 4 をたしたらその結果は 2 になりますか。問 1 の表で調べてみましょう。

Q で調べたことから，$\square+4=2$ の$\square$の中には 5 が入ることがわかります。したがって，$2-4=5$ です。

逆算の考えを使うならば，Z_7 のように，加法がいつでも成り立つ（加法について閉じている）ならば，減法もいつでも成り立つということがわかります。

乗法を，同じ数をくり返し加えるという，同数累加で計算すると，Z_7 で乗法を考えることができます。

問　4　Z_7 の乗法の結果を，下の表にまとめなさい。

	0	1	2	3	4	5	6
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

問　5　問4の表を使って，Z_7 のなかで次の計算をしなさい。

①　2×3　　②　3×2　　③　1×4

問　6　集合 Z_7 のなかで $2\times2=4$ であることから，$4\div2$ の値を求めなさい。

それでは，Z_7 のなかで，$2\div4$ はどう考えたらよいでしょうか。

$2\div4$ の商は，$\square\times4=2$ の□にあてはまる数です。減法のときと同じように，除法を乗法の逆と考えて計算することができます。

Q　何に4をかけたらその結果は2になりますか。問4の表で調べてみましょう。

Qで調べたことから，$\square\times4=2$ の□の中には4が入ることがわかりますから $2\div4=4$ です。

▶▶ Z_7 での加法，乗法は表がなくてもできますが，減法，除法は逆数を使って考えるなど，やや煩雑でした。もう少し簡単に考えることができないでしょうか。

手がかりとして，分数の除法，正負の数の減法を振り返ってみましょう。

分数の除法は，次のように考えることができます。

$$\begin{aligned}\frac{2}{7}\div\frac{3}{5}&=\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}\right)\div\left(\frac{3}{5}\times\frac{5}{3}\right)\\&=\left(\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}\right)\div 1\\&=\frac{2}{7}\times\frac{5}{3}\\&=\frac{10}{21}\end{aligned}$$

上の計算では，わる数を 1 にするために，$\frac{3}{5}$ の逆数 $\frac{5}{3}$ をわる数，わられる数の両方にかけて計算しています。

このように，分数の除法では

わる数とわられる数に同じ数をかけても，同じ数でわっても商は変わらない。

という除法のきまりを用いて考えることができました。

正負の数の減法も同じように考えることができます。

$$\begin{aligned}&(+2)-(+4)\\&=\{(+2)+(-4)\}-\{(+4)+(-4)\}\\&=\{(+2)+(-4)\}-0\\&=(+2)+(-4)\\&=-2\end{aligned}$$

問 7 上の正負の数の減法で用いられている減法のきまりをいいなさい。

分数の除法，正負の数の減法で使われたきまりは，計算は違いますが形は同じです。

ほかにも次のような計算のきまりがありました。

次の計算は同じ形で進んでいます。これは構造が同じだからできることです。

$a+b$		$a\times b$
① $a+b=b+a$		① $a\times b=b\times a$
② $(a+b)+c=a+(b+c)$	$\Leftrightarrow$	② $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
③ $a+0=0+a=a$		③ $a\times 1=1\times a=a$
④ $a+(-a)=0$		④ $a\times\dfrac{1}{a}=1$

③のように，たしても答がもとの式と同じになる数 0，かけても答がもとの式と同じになる数 1 を，加法，乗法の**恒等元**（**単位元**）といいます。また，④のように，計算したときに答が恒等元（単位元）になる数を，たがいに加法，乗法の**逆元**といいます。

問 8　上の計算のきまりが Z_7 についても成り立っていることを確かめなさい。

問 9　Z_7 のなかで，1，2，3，4，5，6 の加法の逆元をそれぞれいいなさい。
また，乗法の逆元をそれぞれいいなさい。

正負の数の減法を考えることをもとにして，Z_7 のなかでの $2-4$ の求め方を考えてみましょう。

$4+3=0$ ですから，4 の逆元は 3 です。したがって，次のように計算することができます。

$$\begin{aligned}2-4&=(2+3)-(4+3)\\&=(2+3)-0\\&=2+3\\&=5\end{aligned}$$

$2 \div 4$についても同じように考えてみましょう。

$4 \times 2 = 1$ですから，4の逆元は2です。したがって

$$
\begin{aligned}
2 \div 4 &= (2 \times 2) \div (4 \times 2) \\
&= (2 \times 2) \div 1 \\
&= 2 \times 2 \\
&= 4
\end{aligned}
$$

このように，逆元の考え方を用いると，減法や除法を加法や乗法になおすことができます。Z_7について，どの数にも加法と乗法の逆元が存在しますから，集合Z_7は加減乗除がいつでもできる集合であることがわかります。

逆元を用いて，方程式を解くことができます。

Q　$3x+4=1$は，いままで次のようにして解いてきました。(1)，(2)での式変形は何のために行っているのか説明してみましょう。

$$
\begin{aligned}
3x+4 &= 1 \\
3x+4-4 &= 1-4 &&\cdots\cdots(1) \\
3x &= -3 \\
3x \times \frac{1}{3} &= -3 \times \frac{1}{3} &&\cdots\cdots(2) \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

例 1　Z_7のなかで，方程式 $3x+4=1$ を解いてみよう。

$3x+4=1$

$3x+4+3=1+3$　← 4の項を0にするために，両辺に3を加える

$3x=4$

$3x \times 5=4 \times 5$　← $3x$の項の係数を1にするために，両辺に5をかける

したがって

$x=6$

問 10 Z_7 のなかで，次の方程式を解きなさい。

① $5x+3=2$　　　　　② $2x+3=4x+1$

▶▶Z_7 では，加減乗除がいつでもできました。どんな場合でも加減乗除がいつでもできるのでしょうか。

Z_6 の加法と乗法の表は下のようになります。

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

×	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

集合 Z_6 で，減法，除法がいつでもできるでしょうか。

Z_6 では，減法はいつでもできますが，除法はいつでもできるとはかぎりません。

Q Z_6 の乗法で，1 の逆元は何ですか。また，3 の逆元は何ですか。

$2\div3$ は 3 の逆元がないので乗法になおすことができません。

逆算の考え方でも $2\div3$ について考えてみましょう。

$2\div3=\square$ ですから，$\square\times3=2$ となります。しかし，ある数に 3 をかけて 2 になるような数は Z_6 にはないので，答がありません。このように，答がないときに「不能」ということがあります。

また，4÷2でも，2の逆元がないので乗法になおすことができません。

この場合についても逆算の考え方で調べてみましょう。

問 11 4÷2＝□ですから，□×2＝4となります。ある数に2をかけて4となるような数を求めなさい。

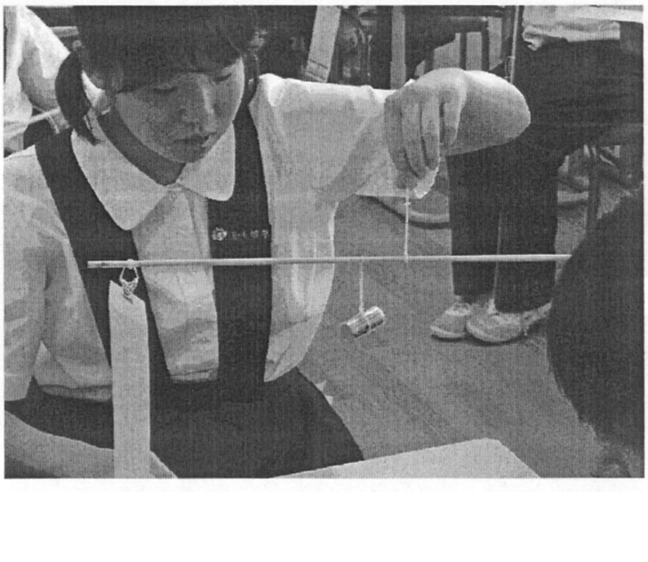
4÷2＝□では，□には2と5どちらが入っても成り立ってしまうため，今度は，答が1つに決まりません。この場合は，除法ができないのではなく，除法の答が1つに決まらないのです。このような場合を，「不定」ということがあります。

Z_6 の乗法のように乗法の逆元が存在しないときは，除法はいつでもできるとは限りません。加法の逆の減法，乗法の逆の除法がいつでもできるかどうかは，どの元にも逆元が存在するかどうかで調べることができます。

➲➲ Z_6 や Z_7 以外の集合でたし算やかけ算を考え，加減乗除がいつでもできるかどうかを調べてみましょう。

第2単元

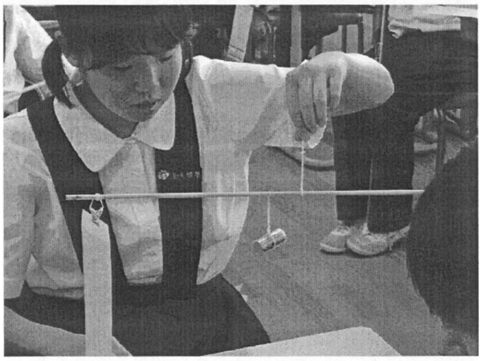
1次関数



① 1次関数

1 1次関数

Q 右の写真のような道具を「さおばかり」といいます。このさおばかりを実際に作り，封筒1枚と便せんを何枚かつるして，便せんの枚数とつり合うおもりの位置の関係を調べてみましょう。



用意するもの

木の丸棒，洗濯ばさみ，たこ糸，フィルムケース，1円硬貨，おもり

実験

1 封筒を1枚下げたとき，つり合うおもりの位置に印をつける。

2 封筒1枚に便せんを1枚，2枚，3枚，…と加えていき，それぞれつり合うおもりの位置に印をつける。

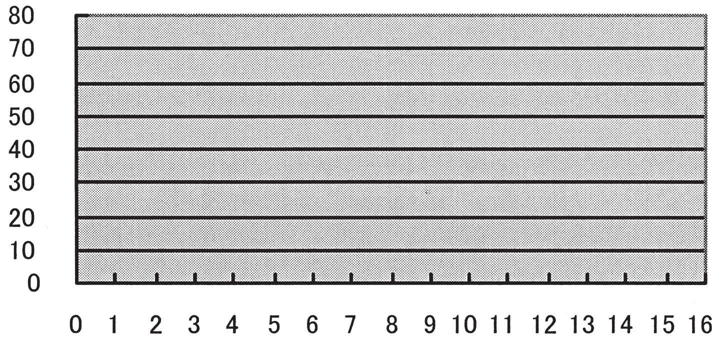
3 支点の位置から印までの距離をはかって記録する。

ゆみこさんはこの実験で，次の表のような結果を得ました。

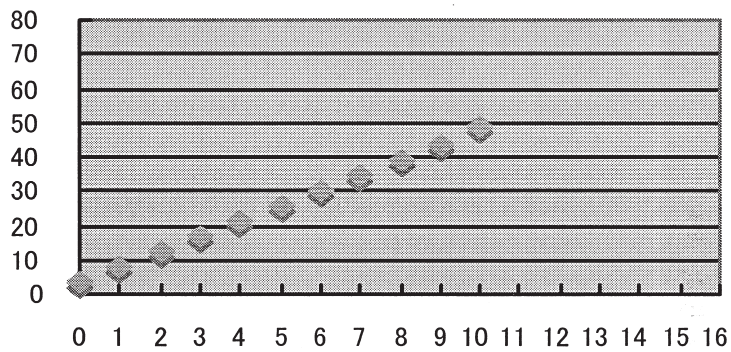
便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
支点からの距離	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

便せんが15枚のときは，支点から印までの距離は何cmになるでしょうか。

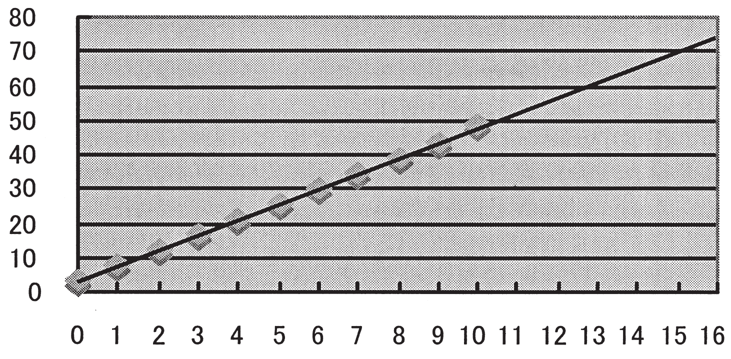
便せんが15枚のときの支点からの距離を求めるために，上のゆみこさんのデータをもとに，この関係をグラフに表してみましょう。



この表のデータをプロットしてみると，下の図のようになります。



点が直線上に並んでいるので，すべての点を通るように直線をひいてみます。



上のグラフで，便せんが 15 枚のときは，71cm と求めることができます。

このように，グラフをかくと，対応する値を求めることができます。

問 1 自分の実験データを使ってグラフをかき，便せんが 15 枚のときの支点からの距離を求めなさい。

下の表から，便せんが 1 枚増えるごとに支点からの距離が 4.5cm ずつ増えていることがわかります。しかし，便せんが 0 枚のとき，支点からの距離は 0cm ではないので，便せんの枚数と支点からの距離の関係は比例ではありません。

1　1　1　1　1　1　1　1

便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
支点からの距離	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5　4.5

しかし，下の表のようにすると，(支点からの距離 y)－3.5 の値は，便せんの枚数(x)に比例していることがわかります。

便せんの枚数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(支点からの距離)－3.5	0	4.5	9	13.5	18	22.5	27	31.5	36	40.5	45

(支点からの距離)－3.5 を Y として，Y と x の関係を式に表すと

$Y=4.5x$　← Y は x に比例して，比例定数は 4.5 である

$Y=y-3.5$ ですから　　$y-3.5=4.5x$

したがって　　$y=4.5x+3.5$

14 ページのゆみこさんの実験では，$y=4.5x+3.5$ と表すことができました。このように，2 つの変数 x，y について，y が x の 1 次式で表されるとき，y は x の **1 次関数**であるといいます。支点からの距離は，便せんの枚数の 1 次関数です。

便せんが 15 枚のときの支点からの距離を知りたいときには，関係を表す式 $y=4.5x+3.5$ に $x=15$ を代入して，$y=71$ と求めることができます。

封筒だけ，つまり便せんが 0 枚のときの支点からの距離は 3.5cm であり，$y=4.5x+3.5$ のグラフは y 軸と (0, 3.5) で交わっています。この 3.5 のことを

$y=4.5x+3.5$ のグラフの**切片**

といいます。

2 変化の割合

Q $y=4.5x+3.5$ では，x の値が 1 ずつ増加するときの y の値の増加量は 4.5 でした。x の値が 5 だけ増加するときの y の増加量はどれだけですか。また，そのときの $\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ の値を求めてみましょう。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	3.5	8	12.5	17	21.5	26	30.5	35	39.5	44	48.5

1 次関数では，$\dfrac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}$ の値は一定です。この値を 1 次関数の**変化の割合**といい，$y=ax+b$ の a の値と等しくなります。

例 1 $y=4.5x+3.5$ で，x の値が 1 から 6 まで増加したときの，x の値の変化と y の値の変化について調べてみましょう。

x の増加量は　$6-1=5$

それに対応する y の増加量は，上の表から　$30.5-8=22.5$

したがって

$$\frac{(y\text{の増加量})}{(x\text{の増加量})}=\frac{22.5}{5}=4.5$$

問 1 1 次関数 $y=2x+3$ で，x の値が 3 から 7 まで増加したときの変化の割合を求めなさい。

問 2 1 次関数 $y=-3x-2$ で，x の値が次のように増加したときの変化の割合を求めなさい。

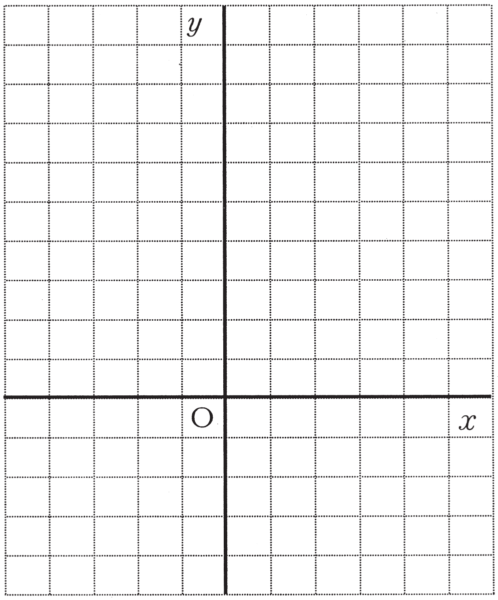
① 1 から 4 まで

② -6 から -2 まで

3　1次関数のグラフ

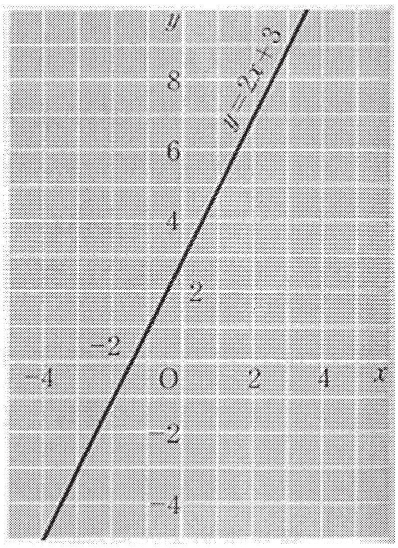
Q　1次関数 $y=2x+3$ の値の表をかき，グラフをかいてみましょう。

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…									…



上の表をくわしくし，もっと多くの点をとってグラフをかくと，右の図のような直線になります。

この直線は，$y=2x+3$ をみたす x，y の値の組 $(x,\ y)$ を座標とする点の集合です。

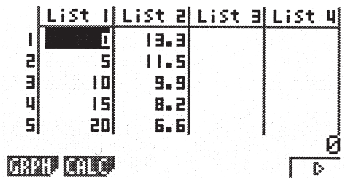


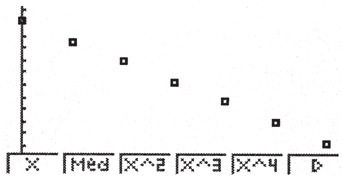
4　1次関数の利用

線香を燃やす実験で，線香に火をつけてからの時間を x 分，残りの線香の長さを y cm とすると，次のようなデータが得られました。

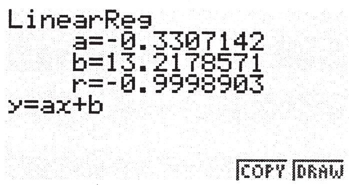
x 分	0	5	10	15	20	25	30
y cm	13.3	11.5	9.9	8.2	6.6	5.0	3.3

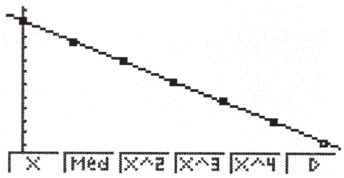
このデータをグラフ電卓に入力し，散布図をつくってみましょう。





変化の割合は一定ではありませんが，グラフにしてみると，点がほぼ直線に並んでいることがわかります。そこで，このグラフを直線とみてみましょう。

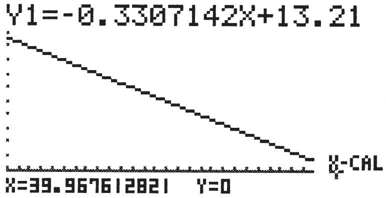




この直線の式は $y=-0.33x+13.2$ です。

このように，実験データから得られた関係を１つの式にまとめたものを**実験式**といいます。

G-Solv で $y=0$ のときの x の値を求めると，$x=40$ となります。燃えつきるところは $y=0$ なので，燃えつきるのはおよそ 40 分後とわかります。



問　1　$y=-0.33x+13.2$ の式で，-0.33 はどういう意味ですか。また，13.2 はどういう意味ですか。

Q 地上 10km くらいまでの気温は，高さの増加にともなって，一定の割合で低くなっていくことがわかっています。

地上の気温が 21℃のとき，地上 x km の高さの気温 y ℃は

$$y=-6.5x+21$$

と表されます。

① このとき，地上 5km の高さの気温は何℃でしょうか。

② 気温が 0 ℃になるのは，地上から何 km 上空でしょうか。

下の表は，高さの増加にともなって気温が変化していくようすを示したものです。

高さ（m）	気温（℃）	高さ（m）	気温（℃）	高さ（m）	気温（℃）
0	15.0	9000	−43.5	18000	−56.5
1000	8.5	10000	−50.0	19000	−56.5
2000	2.0	11000	−56.5	20000	−56.5
3000	−4.5	12000	−56.5	22000	−54.5
4000	−11.0	13000	−56.5	24000	−52.5
5000	−17.5	14000	−56.5	26000	−50.5
6000	−24.0	15000	−56.5	28000	−48.5
7000	−30.5	16000	−56.5	30000	−46.5
8000	−37.0	17000	−56.5	32000	−44.5

問 2 高さと気温の関係をグラフに表し，どんな関係があるか調べなさい。

問 3 空気中での音の速さを毎秒 y m とすると，気温が x ℃のときの音の速さは

$$y=0.6x+331$$

と表されます。

① 気温が −5℃のときの音の速さを求めなさい。

② 気温が 22℃のとき，雷が光ってから 6 秒後に音が聞こえました。雷までの距離を求めなさい。

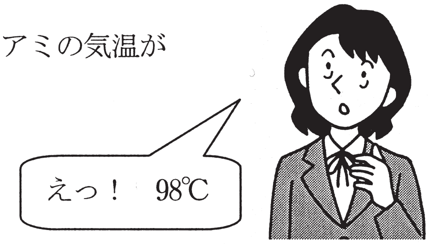
▶▶気温の単位について調べてみましょう。

衛星放送を観ていると，アメリカのマイアミの気温が

最高気温　98°

最低気温　30°

であると報道されていました。



日本ではセ氏（℃）の単位が使われていますが，アメリカではカ氏（°F）という単位が多く使われています。アメリカと日本では，気温の単位は異なっているのです。

マイアミの気温を日本で使われている℃の単位で表すと何℃になるか考えてみましょう。

ある気温を，アメリカの単位で表すと x°F となり，℃の単位で表すと y°C になるとき，x と y の間には，次の(1)の関係があります。

$$5x=9y+160 \qquad \cdots\cdots \quad (1)$$

(1)の式を使って，x から y を求める式を導いてみましょう。

$5x=9y+160$ の左辺と右辺を入れかえ，160 を移項すると

$$9y=5x-160$$

両辺を 9 でわると　$y=\dfrac{5x-160}{9}$　$\cdots\cdots$　(2)

問　4　シカゴのある日の最高気温は 69°F，最低気温が 49°F でした。シカゴの気温を，(2)の式を使って℃の単位で表しなさい。

(1)の式は，$5x-9y-160=0$ とも変形できます。

このような式を，2つの文字 x，y をふくむ**2元1次方程式**といいます。

Q テニスボールを30個買うため，2個入りの缶と3個入りの缶を組み合わせて買うことにしました。2 種類の缶をどのように組み合わせて買えばよいでしょうか。2 個入りの缶を x 個，3 個入りの缶を y 個買うとして，x，y の関係を式に表してみましょう。

Q で求めた式を y について解くと　$y=-\frac{2}{3}x+10$　となります。

この式を利用して，テニスボールを30個買うときの2種類の缶の組み合わせを考えてみましょう。

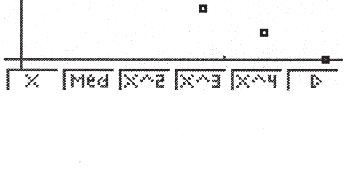
そのときの x と y の組み合わせを表に整理すると，次のようになります。

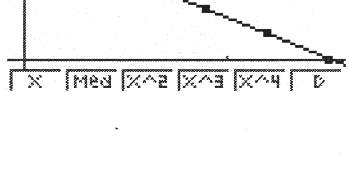
x	0	3	6	9	12	15
y	10	8	6	4	2	0

問 5　上の表をみて，気づくことをいいなさい。

x の値が3ずつ増えると，y の値は2ずつ減っています。x は2個入りの缶の個数なので，x の値が1だけ増えると，テニスボールは2個増えます。x の値が3増えるということはテニスボールが6個増えることになります。すると，3個入りの缶の個数は2減少することになります。

➲➲ 2元1次方程式 $2x+3y=30$ の解の値の組を x 座標，y 座標とする点をグラフ用紙にプロットし，直線のグラフになることを確認しましょう。





▶▶桜の開花日を予想してみましょう。

下の表は，仙台市の３月の平均気温をx℃，仙台市のソメイヨシノの開花日を４月y日として，そのデータを表に整理したものです。

Q 平成17年の３月の平均気温が4.1℃であったとき，４月何日に開花したと予想できるでしょうか。表からまず予想してみましょう。

年次	x （℃）	y （日）
昭和55	3.8	14
56	4.0	13
57	5.1	11
58	4.3	13
59	1.5	28
60	3.7	17
61	3.8	19
62	4.5	10
63	4.1	17
平成元	6.1	3
2	6.2	3
3	5.1	11
4	5.0	6

年次	x （℃）	y （日）
5	4.6	9
6	4.0	11
7	4.7	11
8	4.3	17
9	5.7	8
10	6.1	8
11	5.3	8
12	4.6	14
13	4.9	10
14	7.5	−3
15	4.8	9
16	5.4	7
17	4.1	?

（気象庁調べ）

xとyの関係を１次関数とみて，グラフ電卓を使って開花日を予想してみましょう。

問 6 グラフ電卓を使って，xとyの関係を$y=ax+b$の形の式で表し，次の問に答えなさい。

① 求めた式から，平成17年の開花日を予想しなさい。

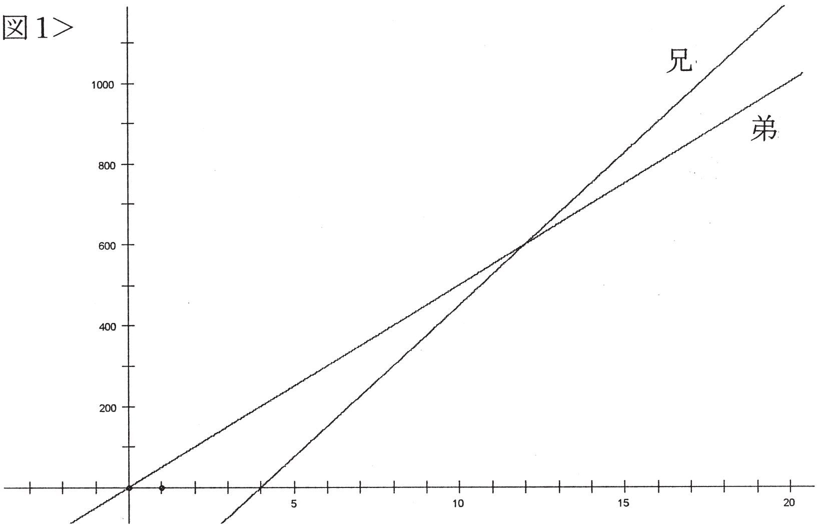
② 求めた式で，aとbの値は，それぞれ何を意味していますか。

② 不等式と連立方程式

1 不等式

兄と弟が 1000m を歩く競争をしました。兄のほうが歩くのが速いので，兄は弟がスタートしてから 4 分後にスタートすることにしました。2 人の歩く速さは一定であるとして，2 人の歩くようすをグラフに表すと，次のようになりました。

<図 1>



問 1 弟がスタートしてから x 分後に，スタート地点から y m はなれているとして，兄と弟の歩くようすを表す式を，グラフから求めなさい。

▶▶弟が兄より先を歩いているときを考えてみましょう。

例 1 弟が兄より先を歩いているとき，2 人の歩いた道のりについて成り立つ式を不等号を使って表すと，次のようになります。

$$75x - 300 < 50x \qquad \cdots \ (1)$$

$75x-300<50x$ のような不等号＜，＞，≦，≧ を用いて数量の間の関係を表した式を**不等式**といいます。

前ページのグラフから，兄が弟に追いつくのは，弟がスタートしてから12分後で，スタート地点から600m のところです。したがって，弟が兄より先を歩いているのは，x の値が12未満のときです。これは，$x<12$ と書けます。

これは，不等式 $75x-300<50x$ の解です。

いっぽう，$x=12$ は

方程式 $75x-300=50x$ $\cdots(2)$

の解で，兄が弟にちょうど追いついたときを表しています。

▶▶次に，兄が弟より先を歩いているときを考えてみましょう。

兄が弟を追い越した後は，x について，次のような不等式が成り立ちます。

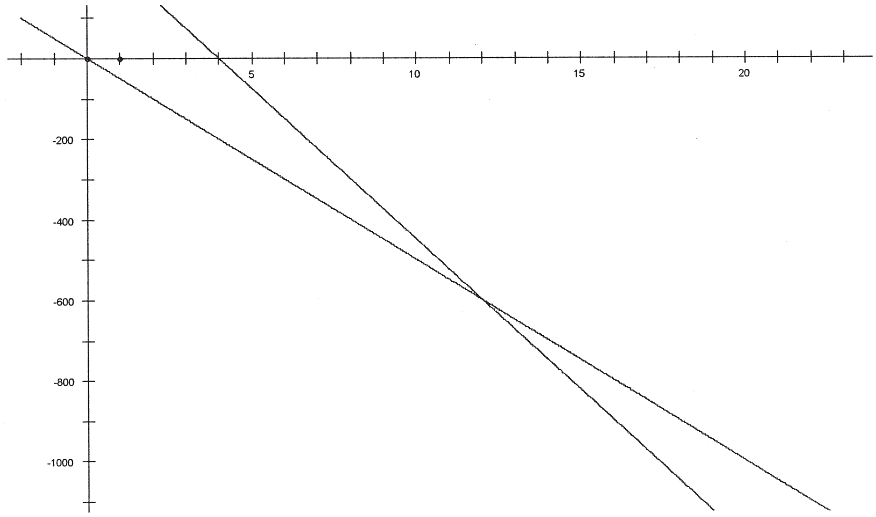
$75x-300>50x$ $\cdots(3)$

問 2 (3)の不等式について，x の値が5，6，7，…，13のときの右辺の値を求め，下の表の大小のらんに，あてはまる不等号，等号を書き入れなさい。

x	左　辺	大小	右　辺
4	$75\times4-300=0$		$50\times4=200$
5	$75\times5-300=75$		$50\times5=$
6	$75\times6-300=150$		$50\times6=$
7	$75\times7-300=225$		$50\times7=$
8	$75\times8-300=300$		$50\times8=$
9	$75\times9-300=375$		$50\times9=$
10	$75\times10-300=450$		$50\times10=$
11	$75\times11-300=525$		$50\times11=$
12	$75\times12-300=600$		$50\times12=$
13	$75\times13-300=675$		$50\times13=$

<図 1>の 2 つのグラフと x 軸について線対称となるグラフをかくと，次のようになります。

<図 2>



<図 2>の 2 つの直線のグラフは，<図 1>のグラフと x 軸について線対称ですから，$y=-75x+300$，$y=-50x$ となります。

すると今度は，グラフから，$x>12$ のときは

$$-75x+300<-50x$$

となっています。この式と (1) の式

$$75x-300<50x$$

とを比較してみると，各項の係数は，(1) の式の両辺に -1 をかけたものになっています。また，この不等式の解の不等号の向きが変わっていることがわかります。

問 3 $x<12$ のときはどうですか。グラフから不等式をつくって，(3) の式と比べてみなさい。

$x<12$ のときも，(3) の式と比較すると，解の不等号の向きが変わっています。

問　4　不等式 $50x<75x-300$ と，不等式 $75x-300>50x$ は，不等式の左辺と右辺が入れかわっただけです。この2つの不等式をAさんと，Bさんは同じように解きましたが，解が違っていました。解が違っているのはどうしてですか。

Aさんの解き方
$50x<75x-300$
$-25x<-300$
$x<12$

Bさんの解き方
$75x-300>50x$
$25x>300$
$x>12$

不等式は，両辺に同じ負の数をかけたり，両辺を同じ負の数でわったりするとき，不等号の向きが変わります。

不等式には，次の性質があります。

●不等式の性質●

1　$A<B$ ならば

$$A+C<B+C,\quad A-C<B-C$$

2　$A<B,\ C>0$ ならば

$$AC<BC,\quad \frac{A}{C}<\frac{B}{C}$$

3　$A<B,\ C<0$ ならば

$$AC>BC,\quad \frac{A}{C}>\frac{B}{C}$$

2 連立方程式とグラフ

市の総合体育大会で，バスケットボール部は優勝をはたしました。なかでもキャプテンの清水選手は，フリースローを除くシュートだけで21得点をあげる活躍でした。

▶▶清水選手は，3点シュート，2点シュートをそれぞれ何回成功させたでしょうか。

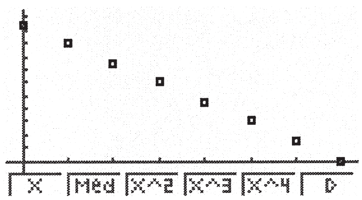
バスケットボールのフリースローを除くシュートの得点の合計で21得点あげたとき，3点シュートを x 本，2点シュートを y 本それぞれ成功させたとして，x，y の関係を等式で表すと，次のような式になります。

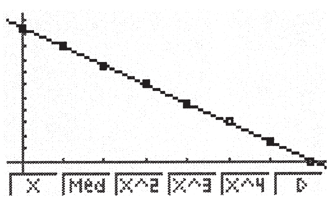
$3x+2y=21$ ………(1)

(1)の式で，x の値が0，1，2，…，7のときの y の値を求めると，次の表のようになります。

3点シュートの本数 x	0	1	2	3	4	5	6	7
2点シュートの本数 y	(10.5)	9	(7.5)	6	(4.5)	3	(1.5)	0

下の図は，これらの値をプロットしたものです。





上の問題に次の条件をつけ加えた問題を考えてみましょう。

清水選手は，3点シュートと2点シュートを合わせて9本成功させました。

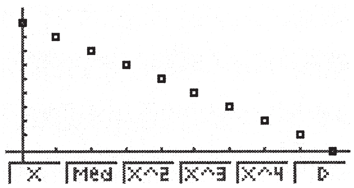
前ページでつけ加えた条件を式で表すと，次のようになります。

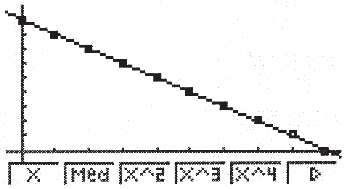
$$x+y=9 \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)の式で，x の値が 0，1，2，…，9 のときの y の値を求めると，次の表のようになります。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

下の図は，これらの値をプロットしたものです。



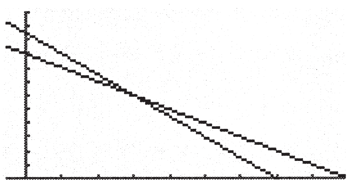


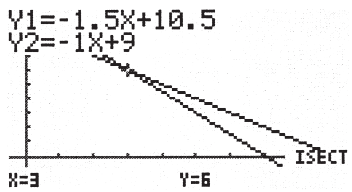
(1)，(2)のような 2 つの文字をふくむ 1 次方程式を，**2 元 1 次方程式**といいます。

$\begin{cases} 3x+2y=21 \\ x+y=9 \end{cases}$ のように，2 つ以上の方程式を組み合わせたものを**連立方程式**といいます。

問　1　(1)と(2)の方程式のグラフを，1 つのグラフ用紙にかいてみなさい。

2 つの方程式を成り立たせるような x，y の値の組は，下の図のように 2 つの直線の交点の座標です。これが**連立方程式の解**です。

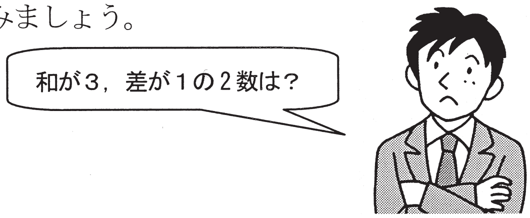




連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y=21 \\ x+y=9 \end{cases}$ の解は，$x=3$，$y=6$ です。

Q 次の連立方程式の解を求めてみましょう。

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$



連立方程式の解について考えてみましょう。

例 1 $\begin{cases} 3x+y=6 \\ 2x+3y=11 \end{cases}$ で，２つの式に $x=1$ を代入すると

上の式では　$3+y=6$　したがって　$y=3$

下の式では　$2+3y=11$　したがって　$y=3$

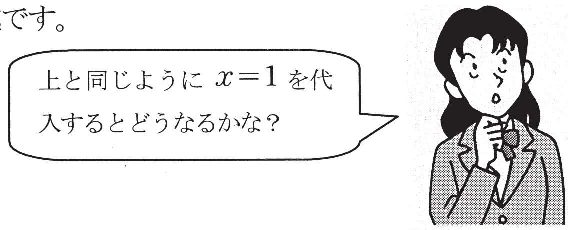
となり，$x=1$ のときの y の値が一致するので，$x=1$，$y=3$ が解であることがわかります。

問 2 次の連立方程式について，$x=1$ を２つの式に代入して，解を求めなさい。

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 5x+3y=-1 \end{cases}$$

次の連立方程式の解はどうでしょうか。この連立方程式は，前のバスケットボールの問題でつくった連立方程式です。

$$\begin{cases} x+y=9 \\ 3x+2y=21 \end{cases}$$



$\begin{cases} x+y_1=9 \\ 3x+2y_2=21 \end{cases}$ として，上の連立方程式の解を考えてみましょう。

上の連立方程式の２つの式に $x=1$ を代入したら，$y_1=8$，$y_2=9$ となります。x の値がいくつのとき y_1 と y_2 は一致するのでしょうか。

x に1，2，3，…を代入して，y_1 と y_2，y_2-y_1 の値を求め，下のような表に整理しました。

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y_2	10.5	9	7.5	6	4.5	3	1.5	0	−1.5	−3
y_2-y_1	1.5	1	0.5	0	−0.5	−1	−1.5	−2	−2.5	−3

y_2-y_1 に注目しましょう。$y_2-y_1=0$ となるときの x の値がわかれば，2つのグラフの交点の x の座標を求めることができます。

上の表で，代入する x の値を1ずつ増やしていくと，y_1 の値は1ずつ減り，y_2 の値は1.5ずつ減ります。このことから，x の値を1ずつ増やしていくと y_2-y_1 の値は0.5ずつ減ることがわかります。$x=0$ のとき $y_2-y_1=1.5$ ですから，$x=3$ のとき $y_2-y_1=0$ となることがわかります。

次に

$$\text{連立方程式}\begin{cases} x-2y=9 \\ 3x+4y=7 \end{cases} \quad \cdots\cdots(1)$$

について，$x=0$，$x=1$ のときのそれぞれの y の値から，2つのグラフの交点の座標，すなわち，解を求める方法を考えてみましょう。

連立方程式を $\begin{cases} x-2y_1=9 \\ 3x+4y_2=7 \end{cases}$ として，$x=0$，$x=1$ のときのそれぞれの y の値を求めると次のようになります。

x	0	1
y_1	$-\dfrac{9}{2}$	$-\dfrac{8}{2}$
y_2	$\dfrac{7}{4}$	$\dfrac{4}{4}$
y_2-y_1	$\dfrac{7}{4}-\left(-\dfrac{9}{2}\right)=\dfrac{25}{4}$	$\dfrac{4}{4}-\left(-\dfrac{8}{2}\right)=\dfrac{20}{4}$

この表から，$x=0$ のときの y_2-y_1 の値 $\frac{25}{4}$ は，x が 1 ずつ増えるごとに $\frac{5}{4}$ ずつ減ることがわかります。y_2-y_1 の値が 0 になるときの x の値，すなわち

$$\frac{25}{4}-\frac{5}{4}x=0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

が成り立つときの x の値が交点の x 座標で，(2)を解くと $x=5$ となります。

連立方程式(1)の 2 つの方程式を y について解くと 次のようになります。

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x-\frac{9}{2} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} \end{cases}$$

この連立方程式は，2 つの式の右辺がそれぞれ y に等しいことから，右のようにして解くことができます。

$$\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$$

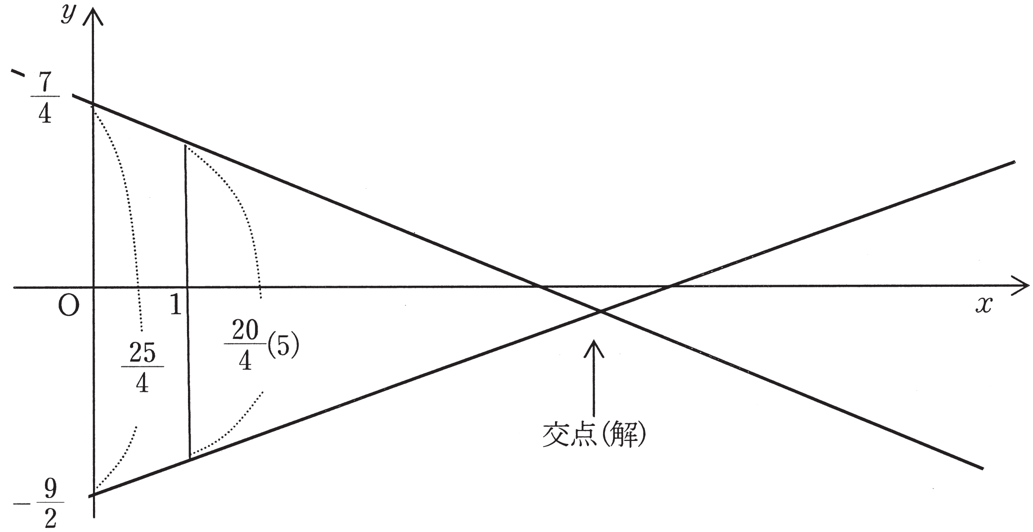
$$\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}x=\frac{7}{4}+\frac{9}{2}$$

$$\frac{5}{4}x=\frac{25}{4}$$

このようにして連立方程式を解く方法を**等置法**といいます。

右の最後の式は(2)の式と同じになります。この式の x の係数は，x の値が 1 だけ増えるときの y_2-y_1 の値の変化，右辺は，$x=0$ のときの y_2-y_1 の値となっています。

これをグラフでみると，次のようになります。



問　3　次の連立方程式を，前ページで説明した方法で解きなさい。

$$\begin{cases} 3x-4y=-15 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$$

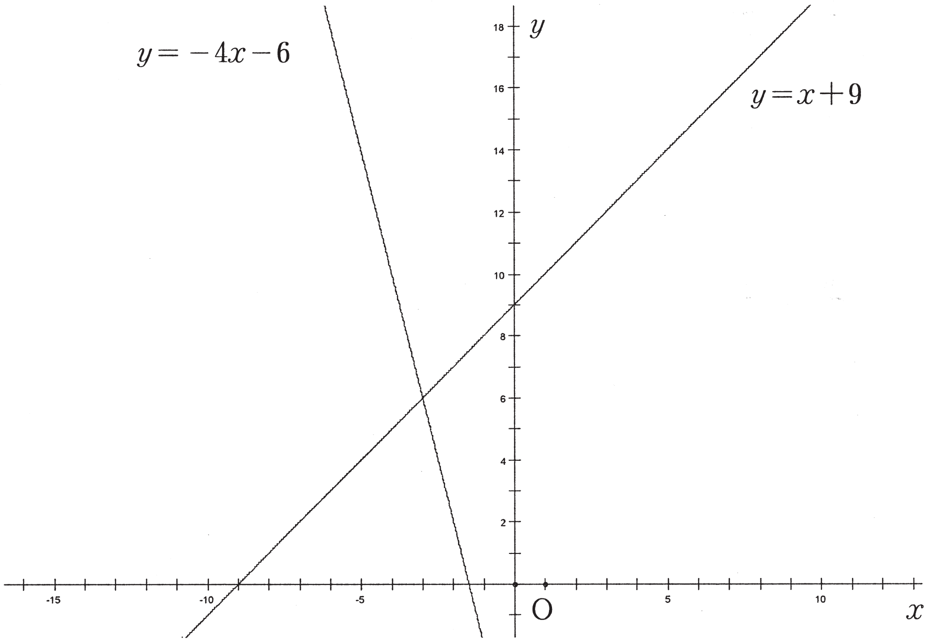
▶▶中学1年で学習した1次方程式も，グラフをかくことによって解決できます。

例　2　$-4x-6=x+9$　をグラフをかいて解いてみましょう。

上の方程式を解くということは，$\begin{cases} y=-4x-6 \\ y=x+9 \end{cases}$ のグラフの交点の

x 座標を求めることと同じです。

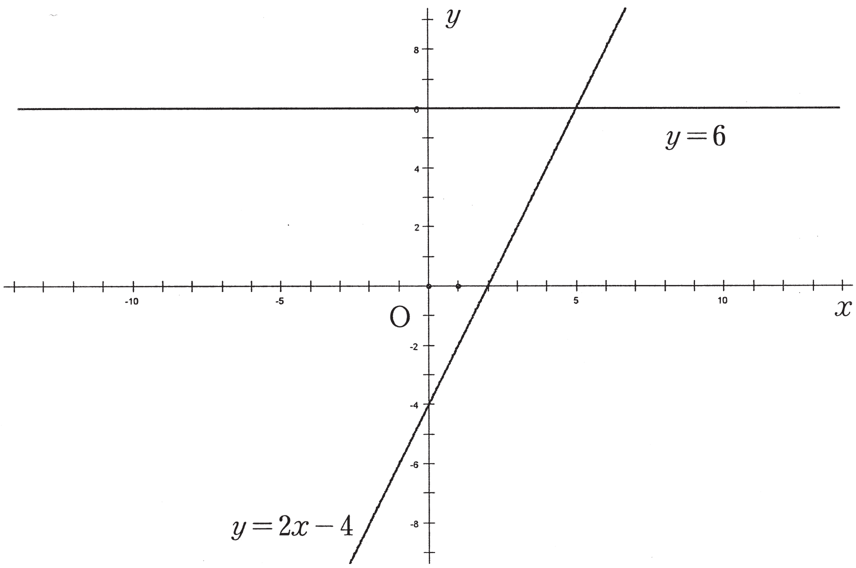
この2つの1次関数のグラフをかくと，下のようになります。



グラフより交点の x 座標を求めて，解が $x=-3$ となります。

例　3　$2x-4=6$ も同様に，$\begin{cases} y=2x-4 \\ y=6 \end{cases}$ と考えてグラフをかき，交点を求めてみましょう。

$y=k$ のグラフは，y 軸の k の値の点を通り，x 軸に平行な直線となります。



グラフの交点から，解は $x=5$ であることがわかります。

問　4　グラフを用いる方法で，次の１次方程式を解きなさい。

①　$-\frac{3}{4}x=6$

②　$3x-2=2x+3$

3 連立方程式の解き方

連立方程式の解を，計算で求める方法を考えていきましょう。

■等置法

連立方程式を等置法で解くには，2 つの 2 元 1 次方程式を「$y=\cdots$」の形にして，右辺どうしが等しいことから 1 次方程式になおして解けばよい。

問 1 次の連立方程式を等置法で解きなさい。

① $\begin{cases} y=x-1 \\ y=3x+9 \end{cases}$　　② $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x-y=9 \end{cases}$

■代入法

等置法のように 2 つの式を「$y=\cdots$」の形にするのではなく，片方だけ「$y=\cdots$」としてもう一方の式に代入して，連立方程式を解くことができます。

例 1 $\begin{cases} y=2x-3 & \cdots\cdots(1) \\ 5x-4y=6 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$ を解いてみましょう。

(1)の y に等しい $2x-3$ を(2)の y に代入すれば，(2)の y が消去されます。

$$5x-4(2x-3)=6$$
$$5x-8x+12=6$$
$$-3x=6-12$$
$$-3x=-6$$
$$x=2 \quad \cdots\cdots(3)$$

(3)を(1)に代入して

$$y=2\times2-3=1$$

したがって，解は $x=2$，$y=1$ となります。

このような解き方を**代入法**といいます。

■**加減法**

次の連立方程式をまず，代入法で解いてみましょう。

$$\begin{cases} 3x-2y=12 & \cdots\cdots(1) \\ 2y=x-8 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1)の式と(2)の式では $2y$ が共通しているので，(1)の $2y$ に(2)の右辺を代入して

$$\begin{aligned} 3x-(x-8)&=12 \\ 3x-x+8&=12 \\ 2x&=4 \\ x&=2 \quad \cdots\cdots(3) \end{aligned}$$

(3)を(2)に代入して

$$\begin{aligned} 2y&=2-8 \\ y&=-3 \end{aligned}$$

したがって，解は $x=2$，$y=-3$　となります。

上の連立方程式を，次のように $2y$ を消去して解くこともできます。

(2)の右辺の x を左辺に移項すると

$$-x+2y=-8 \quad \cdots\cdots\cdots(2)'$$

(1)＋(2)′ を計算して $2y$ を消去することができます。

$$\begin{array}{rll} & 3x-2y=12 & \cdots\cdots(1) \\ +) & -x+2y=-8 & \cdots\cdots(2)' \\ \hline & 2x \qquad =4 & \\ & x=2 & \cdots\cdots(3) \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rl} & A=B \\ +) & C=D \\ \hline & A+C=B+D \end{array}}$$

(3)を(2)′ に代入して

$$\begin{aligned} -2+2y&=-8 \\ y&=-3 \end{aligned}$$

このような解き方を**加減法**といいます。

Q 下の連立方程式は，そのまま加えたり，ひいたりしても1つの文字を消去することはできません。この場合，y を消去するには，どうしたらよいでしょうか。

$$\begin{cases} 7x-2y=29 & \cdots\cdots(1) \\ -2x+y=-10 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

上のような連立方程式の場合，x か y の係数の絶対値を等しくすることで，どちらかの文字を消去することができます。

(2)の両辺に2をかけて y の係数の絶対値を等しくします。

$$\begin{array}{lrl} (1) & 7x-2y &= 29 \\ (2)\times 2 & +)\ -4x+2y &= -20 \\ \hline & 3x \qquad &= 9 \\ & x &= 3 \quad \cdots\cdots(3) \end{array}$$

(3)を(2)に代入して y の値を求めると，$y=-4$　となります。

上の問題を代入法で解いてみましょう。

(2)を $y=2x-10$ と変形して(1)に代入すると

$$7x-2(2x-10)=29$$
$$7x-4x+20=29$$
$$3x=9$$
$$x=3$$

この計算をよく見てみると，加減法でしている計算とまったく同じであることがわかります。

問 2　次の連立方程式を解きなさい。

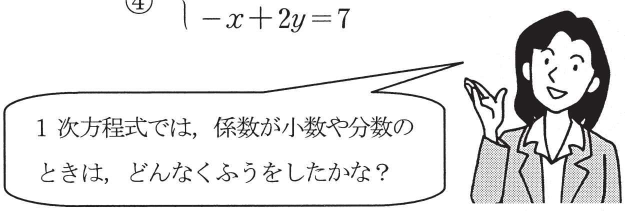
$$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 7x-2y=4 \end{cases}$$

問　3　次の連立方程式を解きなさい。

①　$\begin{cases} y=2x-5 \\ 5x-3y=14 \end{cases}$　　②　$\begin{cases} y=x+5 \\ y=3x-1 \end{cases}$

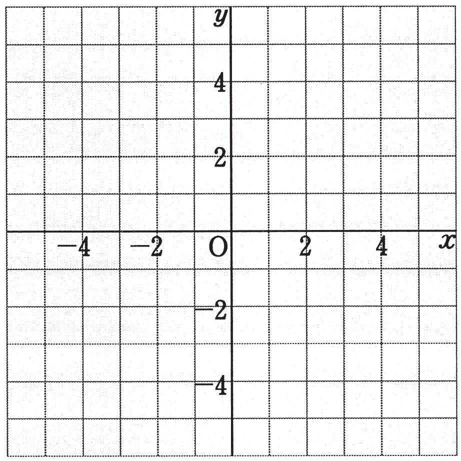
③　$\begin{cases} 3x+2y=17 \\ x-2y=-5 \end{cases}$　　④　$\begin{cases} 0.1x+y=0.5 \\ -x+2y=7 \end{cases}$

⑤　$\begin{cases} x+2y=10 \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \end{cases}$



▶▶次の連立方程式を，グラフを使って解いてみましょう。

$$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots(1) \\ 4x-2y=2 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$



Q　右の図に(1)，(2)の方程式のグラフをかき入れてみましょう。

上の(1)，(2)のグラフは，上でかいたように，同じ直線になります。

したがって，この直線上の点の x 座標，y 座標の組

$(-1,\ -3)$，$(0,\ -1)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$

などは，すべて上の連立方程式の解です。

問　4　次の連立方程式について，下の問に答えなさい。

$$\begin{cases} 2x-y=1 & \cdots\cdots(3) \\ 4x-2y=8 & \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

①　(3)，(4)の方程式のグラフをかきなさい。

②　この連立方程式の解はどうなっているかを考えなさい。

やってみよう！　オリンピックのスケートの優勝タイム

下の表は，冬季オリンピックの男女 500m のスピードスケートの金メダリストのタイムをまとめたものです。

＜冬季オリンピック男女 500m スピードスケートの金メダリストのタイム＞

開催年	男子	女子
1968	40.3	46.1
1972	39.44	43.33
1976	39.17	42.76
1980	38.03	41.78
1984	38.19	41.02
1988	36.45	39.1
1992	37.14	40.33
1994	36.33	39.25
1998	35.59	38.39
2002	34.42	37.30
2006		

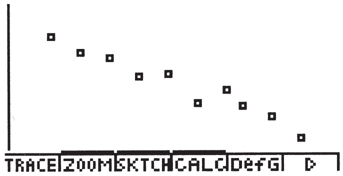
Q　上の表から，2006 年に開催されたトリノオリンピックでの，男子 500m スピードスケートの金メダリストのタイムを予想しましょう。

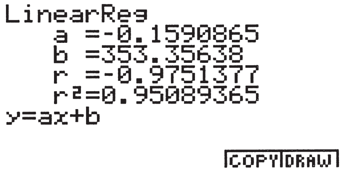
冬季オリンピックの 500m スピードスケートにおいて，女子の金メダリストのタイムが男子の金メダリストのタイムよりも速くなるときがくるでしょうか。また，速くなるとしたら，いつのオリンピックのときでしょうか。グラフ電卓を用いて予想してみましょう。

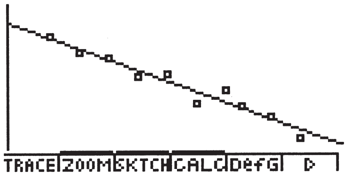
まず，データを List に入力します。

	List 3	List 4	List 5
1	1968	40.3	46.1
2	1972	39.44	43.33
3	1976	39.17	42.76
4	1980	38.03	41.78
5	1984	38.19	41.02

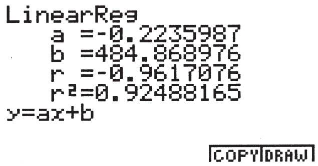
男子のタイムを散布図で表示して，直線で回帰すると次のようになります。



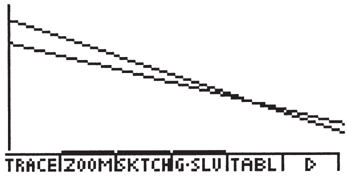


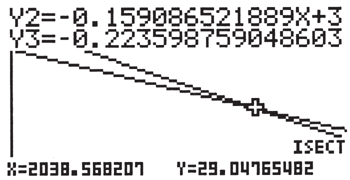


女子のタイムを散布図で表示して，直線で回帰すると次のようになります。



2 つの直線を同時にかき，交点の座標を求めます。この点が男子と女子のタイムが同じになるときです。





この結果から，2039 年には男子のタイムに女子が追いつくと予想されます。したがって，2042 年の冬季オリンピックでは，女子のタイムが男子より速くなるかもしれません。まず，あり得ないと思いますが……。

やってみよう！　ガス料金について考えよう

ひろしさんの家は，都市ガスを使っています。お風呂も温水器もみなガスを使っています。ひろしさんの家の6月のガスの使用量は64m³でした。

この月のガス料金は何円くらいだったのか，明細をなくしてしまったのでわかりません。この月のガス料金を求めてみましょう。

Q 何がわかれば，この月のガス料金が求められるでしょうか。

5月の使用量は83m³で9711円でした。また，7月の使用量は51m³で6368円でした。8月の使用量は45m³で5741円でした。

ガスの使用量が x m³ のときのガス料金を y 円とすると，y は x の1次関数で表され，5月と7月のガス料金から

$y=104.47x+1040$　……(1)

となります。

1m³ あたりの単価

$$y=104.47x+1040$$

基本料金

問 1　(1)の式から，ひろしさんの家の6月のガス料金を求めなさい。

Q ある家の7月のガスの使用量は，5 m³で1295円でした。(1)の式で料金を計算すると，1562円となり，料金はおよそ270円も実際の額と違ってしまいます。なぜこのようなことになると思いますか。

なぜこのようなことが起こるのか調べたくて，近所からガス料金の明細を集めてきました。次ページの表は，集めた明細をまとめたものです。これらのデータから，料金がどのようになっているのかを調べてみましょう。

Q 次ページの表から，わかることをあげてみましょう。

使用量	ガス料金	使用量	ガス料金
10	1901	28	3965
11	2022	83	9711
15	2506	64	7726
2	932	51	6367
6	1416	45	5741
8	1658	60	7308
5	1295	50	6263
7	1537	42	5427
4	1174	38	5009
1	811	33	4487
40	5218	29	4069
24	3547	25	3651
19	2990	31	4278
22	3338		

問 2 使用量がさらに多くなったときは，基本料金と1m³あたりの単価はどうなっていくと思いますか。

問 3 ひろしさんの家の4月分の使用量は97m³で，料金は11118円でした。

① これをもとに料金表Cのかっこをうめなさい。

② さらに料金表D～Fのかっこをうめなさい。

料金表区分	1ヶ月のガス使用量	基本料金 (1ヶ月あたり)税込	料金単価 (1㎥あたり)
料金表A	0m³から21m³	690円	121.1円
料金表B	21m³から85m³	1040円	104.47円
料金表C	85m³から213m³	(　　　　)円	99.88円
料金表D	213m³から534m³	(　　　　)円	97.25円
料金表E	534m³から(　　　)m³	5030円	(　　　　)円
料金表F	(　)m³をこえる場合	9610円	86.20円

➲➲この上の料金を決めるとしたら，あなただったらどのように料金を決めますか。

➲➲他の公共料金（電気や水道，電話などの料金）はどのようになっているか，調べてみましょう。

2 連立3元1次方程式

九章算術という中国の古くからある数学の書物に，次のような問題があります。

今，牛2匹，羊5匹を売ってその銭で豚13匹買ったら1000銭余りました。また，牛3匹，豚3匹を売ってその銭で羊9匹を買うと，ちょうど過不足はありません。また，羊6匹，豚8匹を売ってその銭で牛5匹を買おうとすると銭が600銭不足します。牛，羊，豚のそれぞれ1匹の価はいくらですか。

牛1匹の値段を x，羊1匹の値段を y，豚1匹の値段を zとすると，次の連立方程式ができます。このような連立方程式を**連立3元1次方程式**といいます。

$$\begin{cases} 2x+5y=13z+1000 \\ 3x+3z=9y \\ 6y+8z=5x-600 \end{cases}$$

これを整理すると，次のようになります。これを解いてみましょう。

$$\begin{cases} 2x+5y-13z=1000 & \cdots\cdots(1) \\ x-3y+z=0 & \cdots\cdots(2) \\ -5x+6y+8z=-600 & \cdots\cdots(3) \end{cases}$$

$$\begin{array}{llr} (1) & & 2x+\ 5y-13z=1000 \\ (2)\times 2 & -) & 2x-\ 6y+\ 2z=\quad 0 \\ \hline & & 11y-15z=1000 \quad\cdots\cdots(4) \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} (2)\times 5 & & 5x-15y+\ 5z=\quad 0 \\ (3) & +) & -5x+\ 6y+\ 8z=-600 \\ \hline & & -\ 9y+13z=-600 \quad\cdots\cdots(5) \end{array}$$

$$\begin{array}{llr} (4)\times 9 & & 99y-135z=\ \ 9000 \\ (5)\times 11 & +) & -99y+143z=-6600 \\ \hline & & 8z=\ \ 2400 \\ & & z=\ \ \ 300 \end{array}$$

$z=300$ を(4)に代入して　　$y=500$

$z=300$，$y=500$ を(2)に代入して　　$x=1200$

したがって，　牛1200銭，羊500銭，豚300銭　となります。

前ページの連立3元1次方程式を解くときには，(1)と(2)，(2)と(3)から x をそれぞれ消去して y と z の2元1次方程式を2つつくり，その2つの2元1次方程式から y を消去して z の1元1次方程式をつくりました。

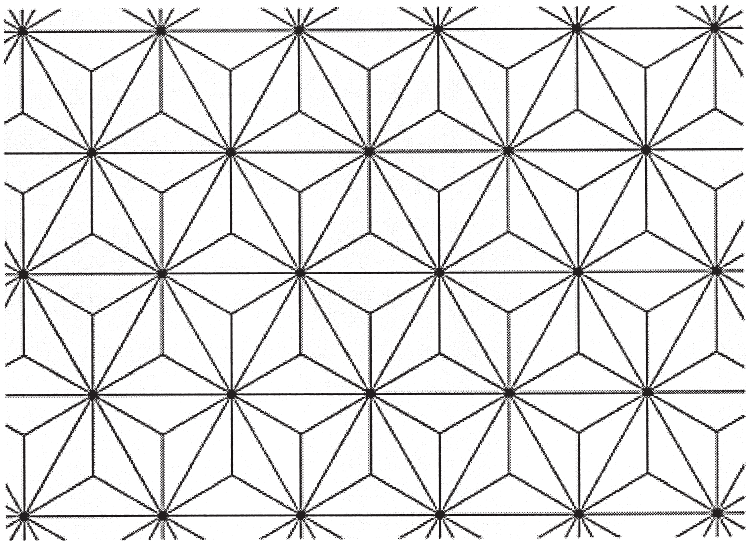
このように，連立3元1次方程式を解くときには，文字を1つずつ消去していくことで，解が求めることができます。

問　1　次の連立3元1次方程式を解きなさい。

① $\begin{cases} x+2y+3z=42 \\ 2x+3y+z=29 \\ 3x+y+2z=31 \end{cases}$　　② $\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=4 \end{cases}$

第3単元

合同な図形



① 多角形の内角と外角の和

1　多角形の内角の和

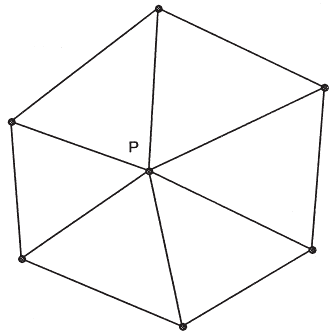
はじめに，三角形の 3 つの角の和が 180° であることから出発して，四角形や五角形などの多角形の角について，どんな性質が導けるか考えてみましょう。

▶▶ 多角形のすべての角の和を求めてみましょう。

Q 次の手順で，六角形を三角形に分けてみましょう。

1　ノートに六角形をかく。

2　右の図のように，六角形の内部に点Ｐをとり，各頂点と点Ｐを線分で結ぶ。

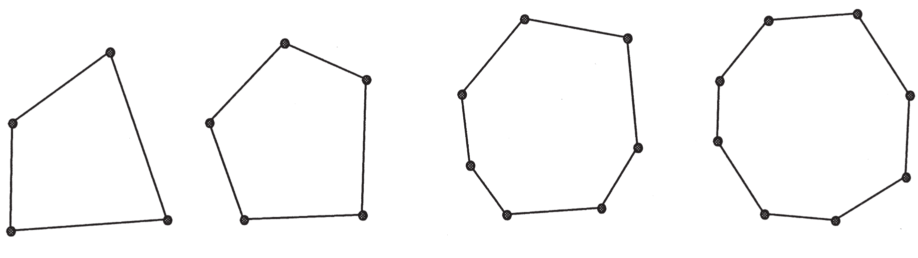


できあがった図について，次のことを考えてみましょう。

① 六角形の内部に三角形はいくつできましたか。

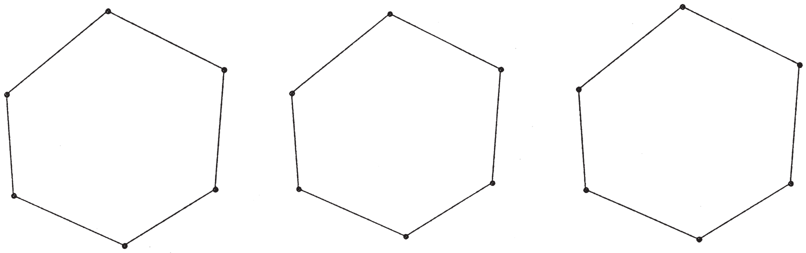
② 三角形の角の和が 180° であることを使って，六角形のすべての角の和を求めなさい。

③ 四角形，五角形や七角形，八角形についても，六角形の場合と同じようにして，すべての角の和を求めなさい。



点Pをいろいろな位置に動かすことによって，六角形のすべての角の和を，前ページと違った方法で求めることができます。

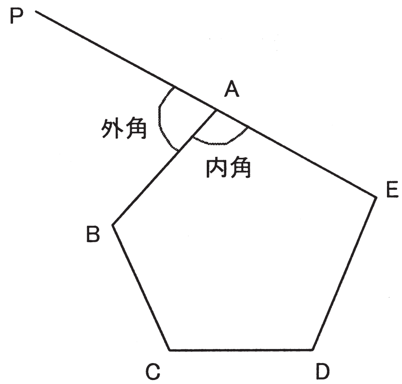
問　1　点 P の位置をいろいろな場所に決め，その点と六角形の各頂点を結んで三角形をつくり，それを利用して，すべての角の和を求めなさい。



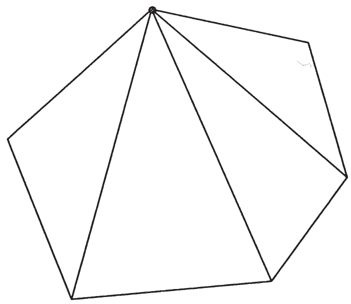
問　2　四角形，五角形や七角形，八角形についても，いろいろな求め方ですべての角の和を求め，それぞれの方法について，その結果を下のような表にまとめなさい。

	四角形	五角形	六角形	七角形	八角形
三角形の数					
角の和					

多角形を示すときには，頂点の名まえを周にそって順にあげ，たとえば，五角形 ABCDE のように表します。右の図の∠BAP のように，1つの辺ととなりの辺の延長とがつくる角を，その頂点における**外角**といいます。また，∠BAE，∠ABC などを**内角**といいます。右の図で，辺 BA を延長して，頂点 A における外角をもう1つつくると，その角は∠BAP と等しくなります。



多角形は，1 つの頂点から出る対角線によっていくつかの三角形に分けられます。



▶▶この分け方で，多角形の内角の和を求めてみましょう。

問 3 下の表の空らんをうめ，それぞれの多角形の内角の和を示す式をつくりなさい。

	四角形	五角形	六角形	七角形	八角形
頂点の数					
対角線の数					
三角形の数					
角の和					

問 4 n 角形のときは，対角線の数や三角形の数はどうなりますか。

●n 角形の内角の和●

$180^\circ \times (n-2)$

問 5 多角形の内角について，次の問に答えなさい。

① 十二角形の内角の和を求めなさい。

② 正九角形の 1 つの内角の大きさを求めなさい。

③ 内角の和が 1620° である多角形は何角形ですか。

2　多角形の外角の和

Q　GSP を使って，次のようにして，図をかいてみましょう。

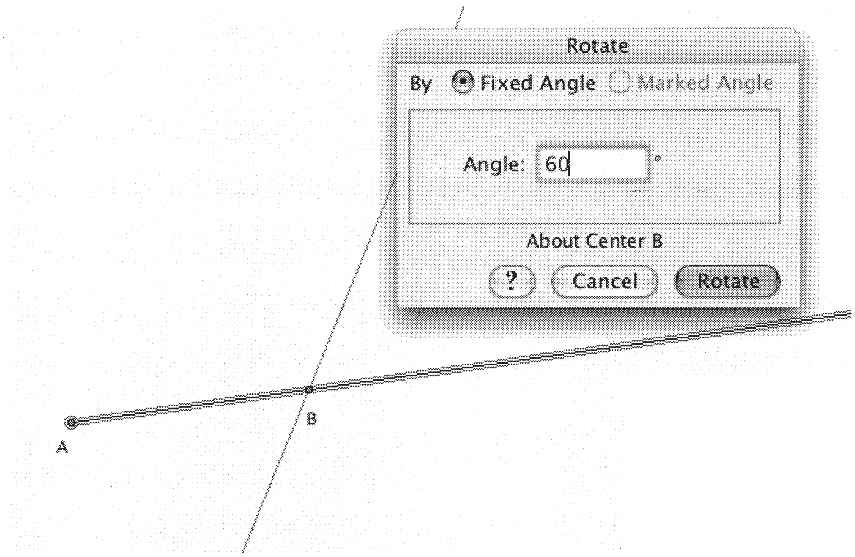
1　半直線 AB をひく。

2　半直線 AB を，点 B を中心に，図のように Transfrom の Rotate 機能を使って 60°回転させる。

3　回転させた直線上に AB と同じ長さの BC をとる。

4　2，3の操作を線分 BC で行う。

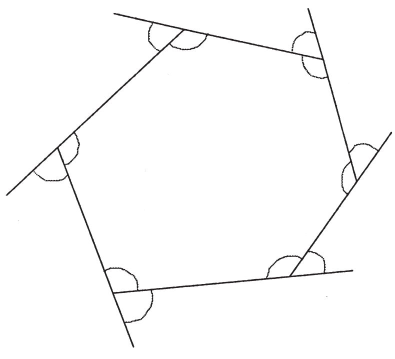
5　この操作をくり返して行う。



①　このことをくり返すと，最初の点 A にもどってくることができるでしょうか。

②　60°以外のいろいろな角度でやってみましょう。

▶▶多角形の外角の和を，内角の和を求める式をもとにして考えてみましょう。
まず，六角形で考えてみましょう。

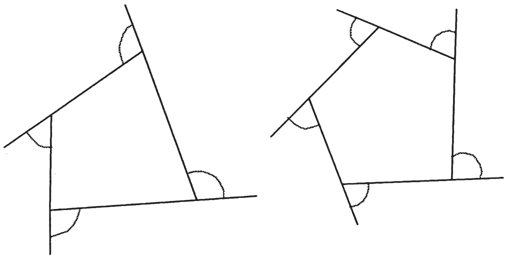


どの頂点でも，内角と外角の和は 180° です。したがって，6 つの頂点の内角と外角の和をすべて加えると　$180^\circ \times 6 = 1080^\circ$

ところが，6 つの内角の和は　$180^\circ \times (6-2) = 720^\circ$

したがって，六角形の外角の和は　$1080^\circ - 720^\circ = 360^\circ$

問 1　六角形の場合と同じようにして，四角形や五角形の外角の和をそれぞれ求めなさい。



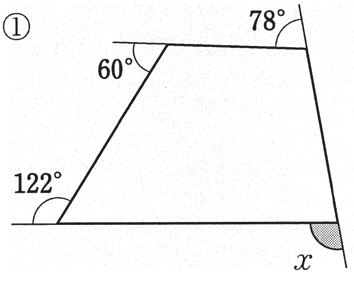
問 2　n 角形の場合について，その外角の和は何度になるか，n を使った式で説明しなさい。

●多角形の外角の和●

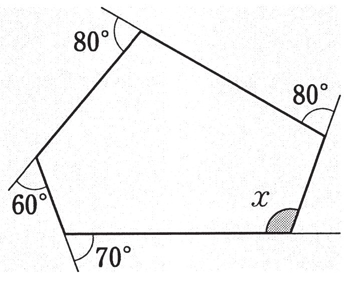
多角形の外角の和は 360° である。

問 3　下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

①



②



問 4　正多角形の外角について，次の問に答えなさい。

①　正八角形の 1 つの外角の大きさを求めなさい。

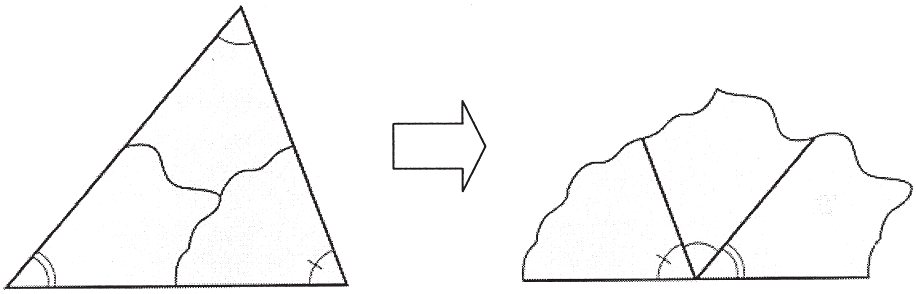
②　1 つの外角が 30° である正多角形は正何角形ですか。

3　平行線と角

1, 2では，三角形の内角の和が 180°であるということから出発して，多角形の角についていくつかの性質を導きました。この三角形の内角の和の性質は，小学校ではどのように確かめたでしょうか。

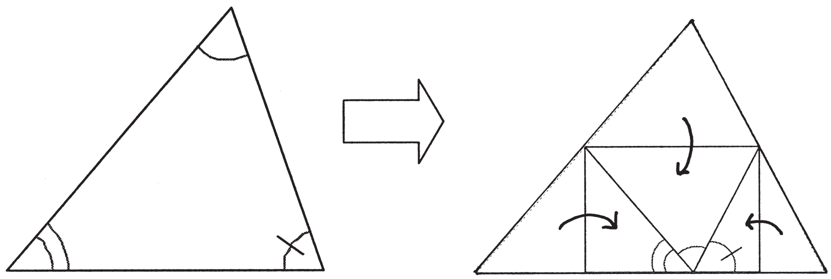
Q　小学校で学習したことを思い出してみましょう。

①　下のように三角形の紙をちぎり，3 つの角を集めてみましょう。



②　三角形の 3 つの角を集めるように三角形を折って説明することもできます。

実際に紙を三角形に切り，下の図のように折ってみましょう。

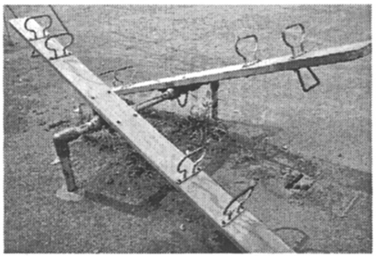


小学校では，上の方法のように実測や実験で説明しました。しかし，これらの方法では，すべての三角形について，三角形の内角の和が 180°であることを説明したとはいえません。

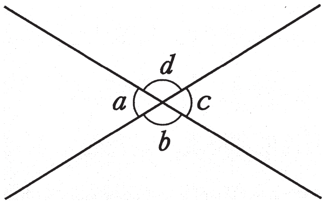
そこで，図形の基本的な性質から三角形の内角の和が 180°であることを導いてみましょう。そうすることによって，すべての三角形について，内角の和が 180°であることが説明できます。

そのために，まず図形の基本的な性質から調べていきましょう。

■対頂角

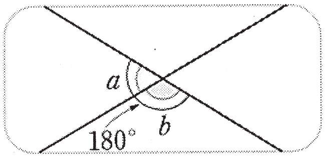


Q Aさんと B さんがシーソーで遊んでいます。Aさんが $10°$ 下がると，B さんは何度上がるでしょうか。



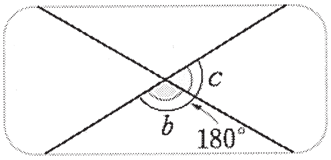
2 つの直線が交わると，その交点のまわりに角ができます。それらの角のうち，右の図の $\angle a$ と $\angle c$ のように向かい合ってできる角を**対頂角**といいます。$\angle b$ と $\angle d$ も対頂角です。

右の図で，$\angle b$ が何度であっても，次のことが成り立ちます。



$$\angle a = 180° - \angle b$$

$$\angle c = 180° - \angle b$$



$\angle a$ と $\angle c$ は，どちらも $180° - \angle b$ に等しいから

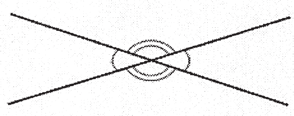
$$\angle a = \angle c$$

となります。

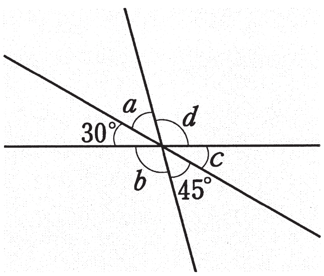
問 1　いちばん上の図で，$\angle b = \angle d$ となるわけを説明しなさい。

●対頂角の性質●

対頂角は等しい。



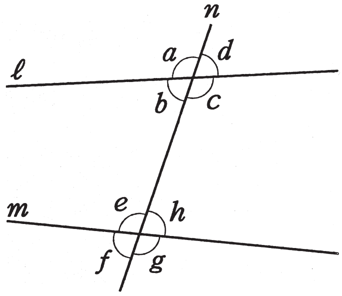
問 2　右の図のように 3 つの直線が 1 点で交わっています。このとき，$\angle a$，$\angle b$，$\angle c$，$\angle d$ の大きさをそれぞれ求めなさい。



■同位角と錯角

右の図のように2つの直線 ℓ，m に1つの直線 n が交わってできる角のうち，$\angle a$ と $\angle e$ のような位置にある角を**同位角**といいます。$\angle b$ と $\angle f$，$\angle c$ と $\angle g$，$\angle d$ と $\angle h$ も同位角です。

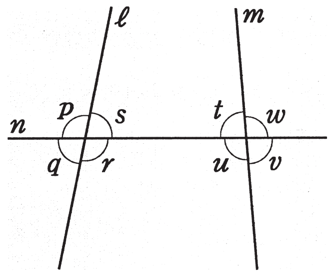
また，$\angle b$ と $\angle h$ のような位置にある角を**錯角**といいます。$\angle c$ と $\angle e$ も錯角です。



問 3　右の図で，次の問に答えなさい。

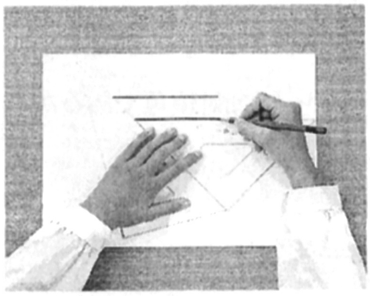
①　$\angle p$ の同位角をいいなさい。

②　$\angle s$ の錯角をいいなさい。



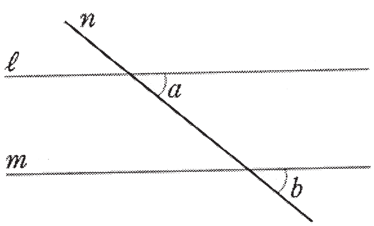
▶▶ 平行線における同位角について，性質を調べてみましょう。

Q　右の図のように，三角定規を使って平行線をひき，同位角になるところに印をつけてみましょう。

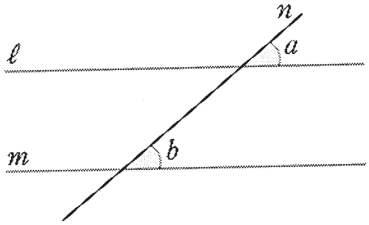


1つの直線 n に対する同位角が等しくなるように，2つの直線 ℓ，m をひけば，ℓ，m は平行になります。

また，平行線 ℓ，m に交わる1つの直線 n をひけば，同位角は等しくなります。



すなわち，右の図で，次のことが成り立ちます。

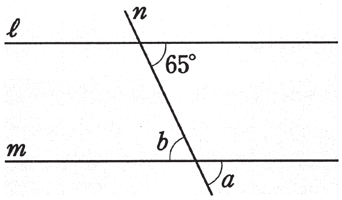


$\boxed{1}$　$\angle a=\angle b$　ならば　$\ell \,/\!/\, m$

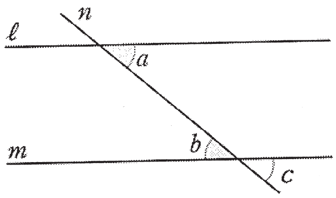
$\boxed{2}$　$\ell \,/\!/\, m$　ならば　$\angle a=\angle b$

▶▶ 平行線における錯角について，性質を調べてみましょう。

Q 右の図で $\ell \,/\!/\, m$ のとき，$\angle a$，$\angle b$ の大きさを求めてみましょう。



右の図で 2 つの直線 ℓ，m が平行であるとき，錯角 $\angle a$，$\angle b$ は等しくなります。このわけは次のようにして説明することができます。



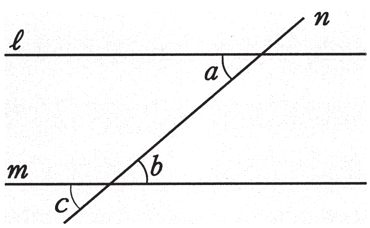
$\angle a$ と $\angle c$ は平行線の同位角であるから

$\angle a=\angle c$

$\angle b$ と $\angle c$ は対頂角であるから　$\angle b=\angle c$

したがって　$\angle a=\angle b$

$\boxed{\text{問　4}}$ 右の図で $\angle a=\angle b$ とします。このとき $\ell \,/\!/\, m$ となるわけを，同位角が等しくなることから説明しなさい。



平行線と角の関係についてまとめると，次のようになります。

●平行線の性質●

平行な2直線に1つの直線が交わるとき，次の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$が成り立ちます。

$\boxed{1}$ 同位角は等しい。

$\boxed{2}$ 錯角は等しい。

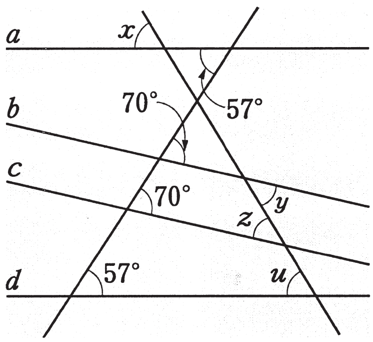
●平行線になるための条件●

2直線に1つの直線が交わるとき，次のどちらかが成り立てば，その2直線は平行です。

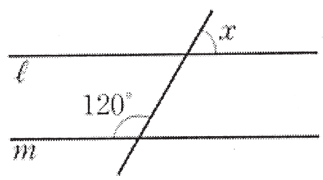
$\boxed{1}$ 同位角は等しい。

$\boxed{2}$ 錯角は等しい。

$\boxed{\text{問　5}}$ 右の直線 a，b，c，d のうちで，平行であるものを，記号 // を使って示しなさい。また，$\angle x$，$\angle y$，$\angle z$，$\angle u$ のうちで，等しい角をいいなさい。



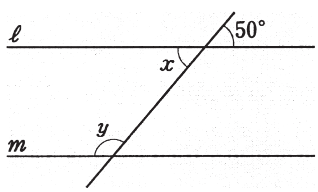
$\boxed{\text{問　6}}$ 右の図で，$\ell \parallel m$ として，$\angle x$ の大きさを求めなさい。



$\boxed{\text{問　7}}$ 右の図で，$\ell \parallel m$ ならば

$\angle x+\angle y=180^\circ$

です。このわけを説明しなさい。



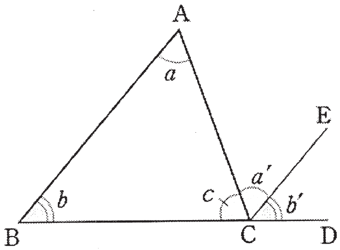
問7の図のような位置にある $\angle x$ と $\angle y$ のことを**同側内角**といいます。

2直線 ℓ と m で，$\ell \parallel m$ ならば，同側内角の和は 180° であることがわかります。

■証明

平行線の性質を学んだので，これをもとに三角形の内角の和が 180° であることを説明しましょう。

右の図のように，△ABC の辺 BC の延長を CD とし，点 C を通って辺 AB に平行な直線 CE をひきます。このとき，次のことが成り立ちます。



平行線の錯角は等しいから　$\angle a=\angle a'$

平行線の同位角は等しいから　$\angle b=\angle b'$

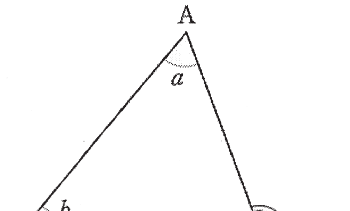
したがって，△ABC の内角の和を求めると

$$\angle a+\angle b+\angle c=\angle a'+\angle b'+\angle c=180^\circ$$

上の説明では，平行線の性質をもとにして，三角形の内角の和が 180° になることを導きました。このように，あることがらが成り立つわけを，すでに正しいとわかっている性質を根拠にして示すことを**証明**といいます。

なお，上の証明から，次のこともわかります。

$$\angle ACD=\angle a+\angle b$$



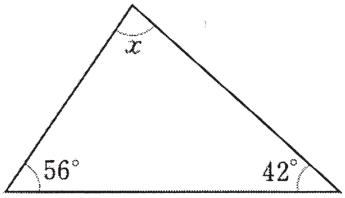
●三角形の内角，外角の性質●

$\boxed{1}$　三角形の内角の和は 180° である。

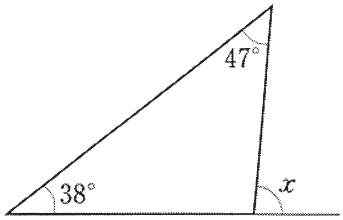
$\boxed{2}$　三角形の外角は，それととなり合わない 2 つの内角の和に等しい。

問 8 下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

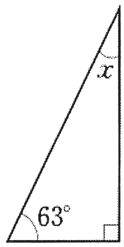
①



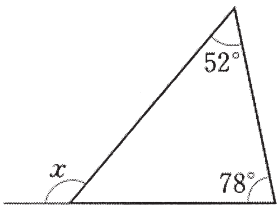
②



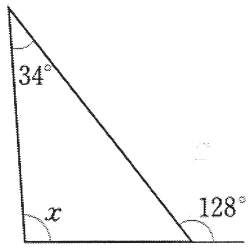
③



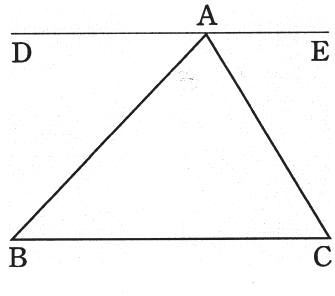
④



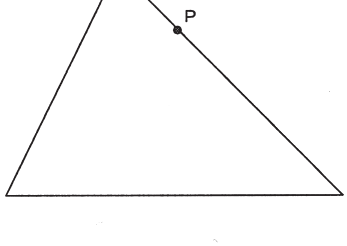
⑤

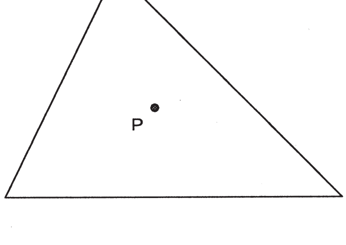


問 9 右の図のように，△ABC の点 A を通り辺 BC に平行な直線 DE をひきます。この図を利用して，三角形の内角の和が 180°であることを証明しなさい。また，ほかの方法でも証明を考えてみなさい。

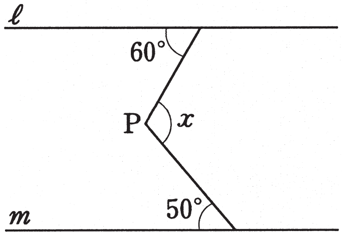


問 10 下の三角形で，三角形の内角が点 P のまわりに集まるように線をひき，三角形の内角の和が 180° であることを証明しなさい。

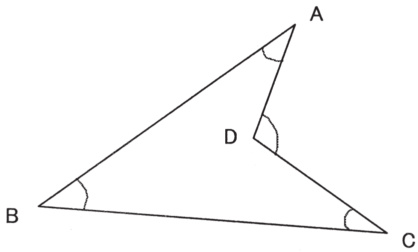




問 11 下の図で，$\angle x$ の大きさを求めなさい。ただし，$\ell /\!/ m$ です。

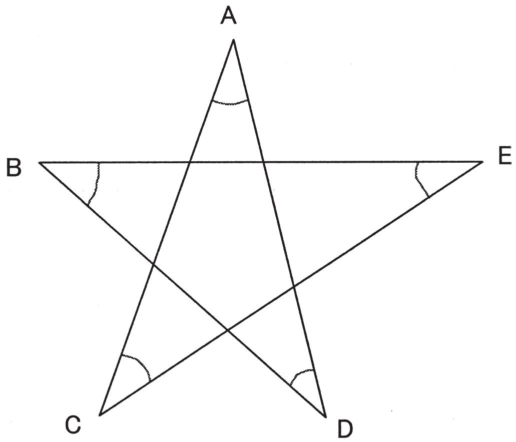


問 12 右の図で，$\angle ADC = \angle A + \angle B + \angle C$ が成り立ちます。このことを，いろいろな方法で証明してみなさい。



やってみよう！　星型多角形

上の問 12 の結果を使って，下の図の印をつけた 5 つの角の和を求めてみましょう。

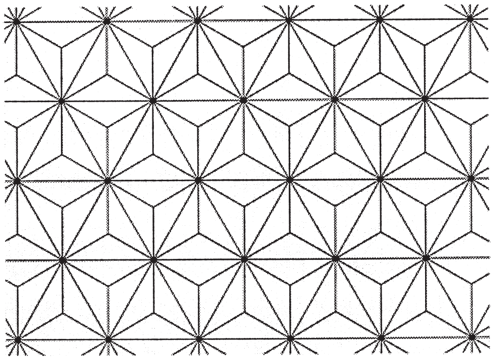


➲➲できるだけたくさんの方法で考えてみましょう。

② 合同な図形

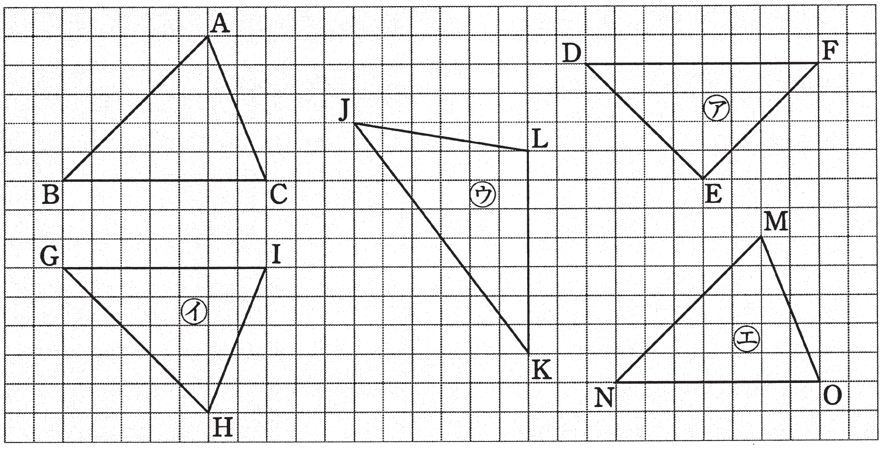
1 合同な図形

Q 右の模様は,「麻の葉」という日本の伝統模様のひとつです。この模様は,ある図形をもとに,その図形と合同な図形をしきつめてできています。もとになっているのは,どの図形でしょうか。



平面上の2つの図形について,一方をずらしたり,裏返したりすることによって他方に重ね合わせることができるとき,この2つの図形は**合同**です

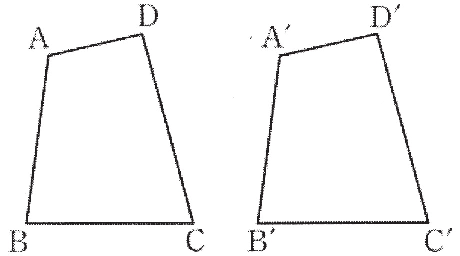
問 1 下の図の三角形 ㋐～㋓ のうち,△ABC と合同な三角形をいいなさい。また,合同な三角形で,対応する頂点や辺をそれぞれいいなさい。



合同な図形では，次のことが成り立ちます。

●合同な図形の性質●

合同な図形では，対応する線分や角は等しい。



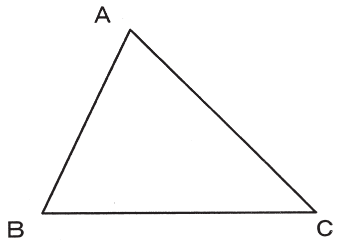
右の図の四角形 ABCD と四角形 A′B′C′D′ が合同で，対応する頂点が A とA′，B とB′，C とC′，D とD′ であるとします。

このようなとき

四角形ＡＢＣＤ≡四角形A′B′C′D′

と表します。「≡」は合同を表す記号です。この記号を使うときは，対応する頂点の名まえを周にそって同じ順に書きます。

問 2　五角形 ABCDE≡五角形 FGHIJ であるとき，対応する辺や角をそれぞれいいなさい。



合同な図形では，対応する線分や角は等しいから，たとえば

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

のとき，次のことがいえます。

対応する辺について

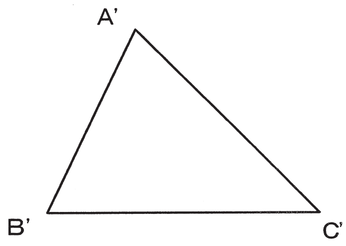
$AB = A'B'$，$BC = B'C'$，

$CA = C'A'$

対応する角について

$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，

$\angle C = \angle C'$



2　三角形の合同条件

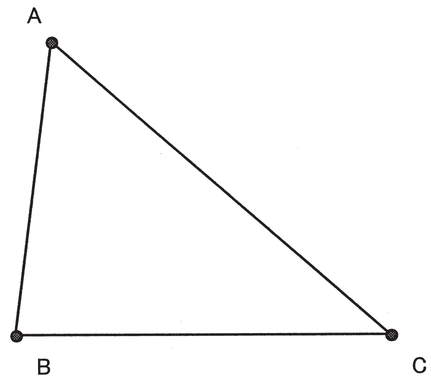
右の三角形は，3 辺の長さが

AB＝4cm，BC＝5cm，CA＝6cm

の三角形です。

3 つの角∠A，∠B，∠C の角度を分度器ではかると，次のようになります。

∠A＝56°，∠B＝83°，∠C＝41°

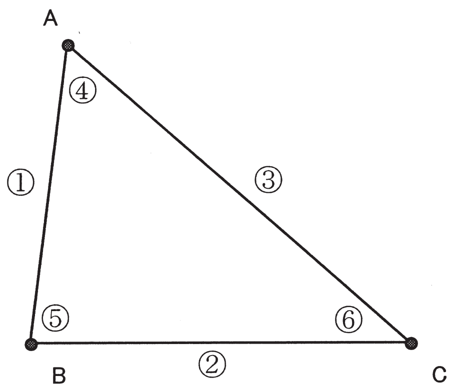


▶▶三角形には辺が 3 つ，角が 3 つあります。上の △ABC と合同な三角形を自分のノートにかくにはどうしたらよいでしょうか。

Q　上の △ABC と合同な三角形を自分のノートにかくには，△ABC の辺と角の条件が最低いくつあればよいでしょうか。

たとえば，辺 AB と辺 BC の長さと∠B の大きさのように，最低 3 つの条件がわかると，合同な三角形がかけます。しかし，条件が 4 つだと，4 つ目の条件を使う前に図がかけてしまいます。

下の図のように，△ABC の 3 つの辺，3 つの角に①～⑥の番号をつけて，このうち，3 つの条件を取り出して，三角形をかくことにします。



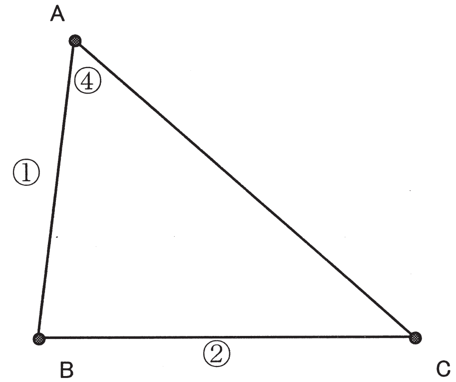
①～⑥から3つ取り出すとき，その取り出し方をすべてかき上げてみましょう。

①②③	①②④	①②⑤	①②⑥	①③④
①③⑤	①③⑥	①④⑤	①④⑥	①⑤⑥
②③④	②③⑤	②③⑥	②④⑤	②④⑥
②⑤⑥	③④⑤	③④⑥	③⑤⑥	④⑤⑥

その取り出し方は，上のように20通り考えられます。

このままではわかりにくいので，分類しましょう。

たとえば ①②④は，図からわかるように，2辺と1角の条件を示しています。



また，①②⑤は，同じ2辺と1角ですが，この角は2辺の間にあるから，「2辺とその間の角」となります。このように分類してみましょう。

3辺	①②③
2辺と1角	①②④，①②⑥，①③⑤，①③⑥，②③④，②③⑤
2辺とその間の角	①②⑤，②③⑥，①③④
1辺と2角	①④⑥，①⑤⑥，②④⑤，②④⑥，③④⑤，③⑤⑥
1辺とその両端の角	①④⑤，②⑤⑥，③④⑥
3角	④⑤⑥

この6つの場合で△ABCをかくとき，△ABCがただ1つ決まるときは，どの場合か考えてみましょう。

例　1　「2辺と1角」の場合で△ABCをかいてみましょう。

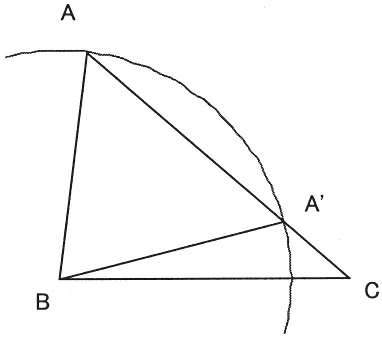
①②⑥のとき，つまり

AB＝4cm

BC＝5cm

∠C＝41°

の3つの条件で△ABCをかくと，右の図のように，△ABC，△A′BCの2つの三角形ができます。



「2辺と1角」という条件で△ABCをかくと，たしかに△ABCはかけますが，上で調べたように，もう1つこの条件をみたす三角形ができます。△ABCがただ1つ決まる場合を考えているので，この条件では三角形は1つには決まらないということになります。

問　1　上の例と同じように考えて，「3角」の場合を考えてみましょう。

残りの場合についても，△ABCがただ1つに決まるかどうか実際に図をかいて調べてみましょう。

1辺と2角の場合，たとえば　BC＝5cm，∠A＝56°，∠B＝83°のときを考えましょう。

この条件で三角形をかくのは難しいです。しかし，三角形の内角の和は180°であることは証明しているので，三角形の内角のうち2つの角がわかっているので，もう1つの角はすぐにわかります。ですから，2つの角の位置を「1辺の両端」と決めれば，三角形はただ1つに決まります。

したがって，次の(ア)～(ウ)の辺と角の組について，その長さや大きさを決めれば，三角形はただ1つ決まります。

（ア）　3 辺

（イ）　2 辺とその間の角

（ウ）　1 辺とその両端の角

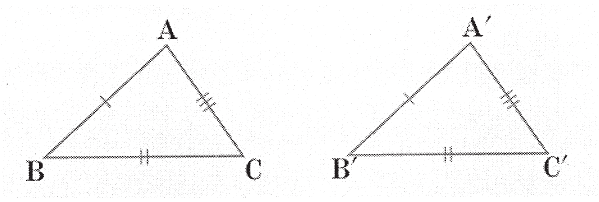
△ABC があるとき，上の(ア)～(ウ)のどれかを使えば，△ABC と合同な三角形をかくことができます。

これまでに調べたことから，次の三角形の合同条件が導かれます。

●三角形の合同条件●

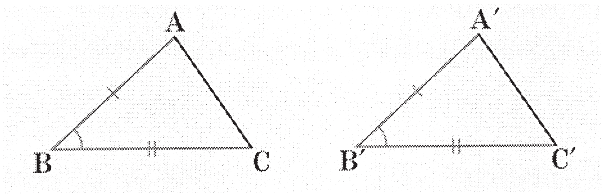
2 つの三角形は，次のどれかが成り立つとき合同です。

$\boxed{1}$　3 辺がそれぞれ等しい。



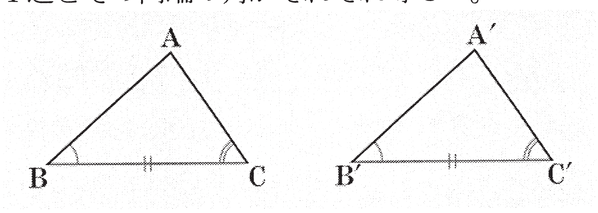
$$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases}$$

$\boxed{2}$　2 辺とその間の角がそれぞれ等しい。



$$\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ \angle B = \angle B' \end{cases}$$

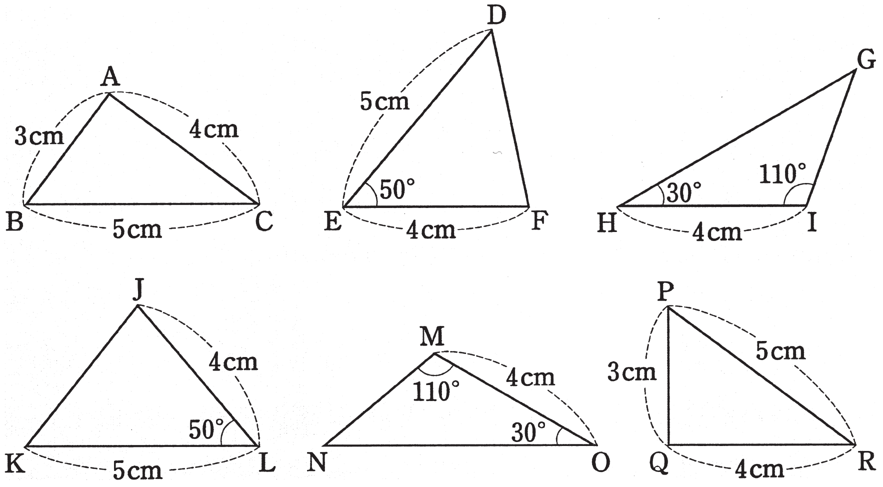
$\boxed{3}$　1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい。



$$\begin{cases} BC = B'C' \\ \angle B = \angle B' \\ \angle C = \angle C' \end{cases}$$

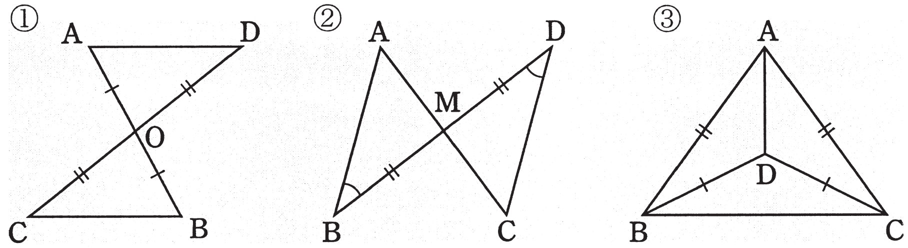
2 つの三角形の合同を調べるときには，いちいち重ね合わせなくても，合同条件のどれかがあてはまれば，合同であると判断することができます。

問 2 下の図で，合同な三角形はどれとどれですか。記号≡を使って表しなさい。また，そのとき使った合同条件をいいなさい。



問 3 問 2 で，△ABC と合同な三角形において，AC と等しい辺をいいなさい。また，∠A と等しい角をいいなさい。

問 4 次のおのおのの図形において，合同な三角形はどれとどれですか。記号≡を使って表しなさい。また，そのとき使った三角形の合同条件をいいなさい。ただし，同じ印をつけた辺や角は，それぞれ等しいとします。



三角形の合同条件は，平行線と角の関係などとともに，いろいろな図形の性質を証明したり，作図の根拠を示したりするのに使われます。

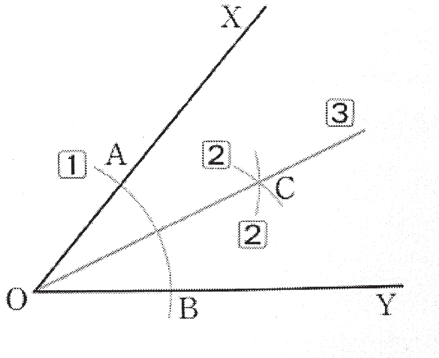
1 年で学んだ角の二等分線の作図について，その方法が正しいことを確かめてみましょう。

∠XOY があたえられたとき，その二等分線 OC をひく方法は次のようでした。

1 頂点 O を中心とする円をかき，辺 OX, OY との交点を A，B とする。

2 A，B を中心として等しい半径の円をかき，その交点を C とする。

3 半直線 OC をひく。



この方法でひいた半直線 OC が∠XOY の二等分線になっていることは，右下の図のように A と C，B と C を結び，△OAC と △OBC の合同を示すことによって証明できます。

〈証 明〉

△OAC と △OBC において

$$\begin{cases} OA = OB \\ AC = BC \\ OC = OC \end{cases}$$

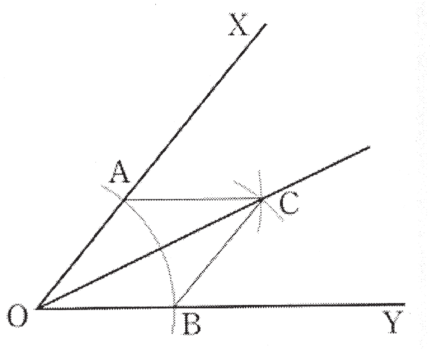
3 辺がそれぞれ等しいから

△OAC≡△OBC

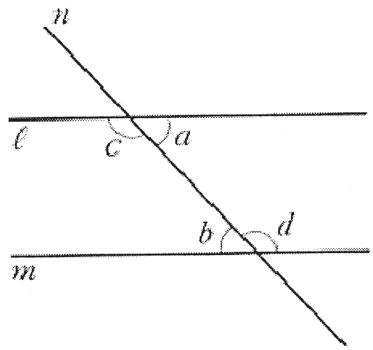
合同な三角形の対応する角は等しいから

∠AOC＝∠BOC

したがって，OC は∠XOY の二等分線である。



3 証明のすすめ方



■仮定と結論

Q 右の図のように，2 直線 ℓ，m に 1 つの直線 n が交わっています。次の□にあてはまる記号を書き入れてみましょう。

① $\ell \parallel m$ ならば $\angle a$ □ $\angle b$

② $\angle c = \angle d$ ならば ℓ □ m

③ $\ell \parallel m$ ならば $\angle a + \angle d$ □ $180°$

図形の性質は

○○○ ならば □□□

という形で述べられることが多くあります。このような文では

「ならば」の前の ○○○ の部分を**仮定**

「ならば」のあとの □□□ の部分を**結論**

といいます。

例 1 上の①では，$\ell \parallel m$ が仮定，$\angle a = \angle b$ が結論です。

問 1 上の②，③について，それぞれ仮定と結論をいいなさい。

問 2 次の①，②，③について，それぞれ仮定と結論をいいなさい。

① $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ならば $AB = DE$

② x が 6 の倍数 ならば x は 2 の倍数である。

③ $x = 2$ ならば $3x - 5 = 1$

真である(正しい)か，偽である(正しくない)かが決まっている文章を**命題**といいます。上の問の①～③の命題は真ですが，たとえば

「$x = 3$ ならば $2x - 3 < 0$」という命題は偽です。

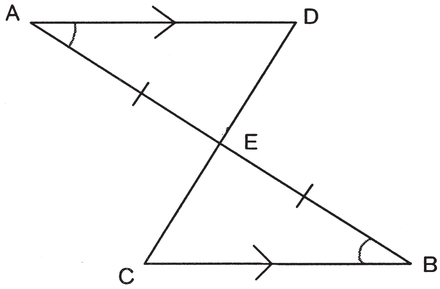
■証明の根拠となることがら

根拠となることがらを明らかにして，図形の性質を証明してみましょう。

例 2 右の図は，線分 AB と CD との交点を E として

EA＝EB，AD∥CB

となるようにかいたものです。このとき，ED＝EC となることを証明してみよう。



〈考え方〉 仮定は EA＝EB，AD∥CB

結論は ED＝EC

です。

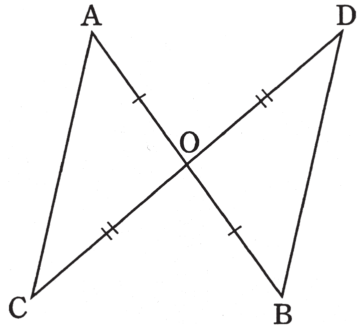
仮定から結論を導くには，△AED と △BEC の合同を示せばよい。

〈証 明〉 △AED と △BEC において

		根拠となることがら
EA＝EB	………	仮定
∠AED＝∠BEC	………	対頂角は等しい。
∠EAD＝∠EBC	………	平行線の錯角は等しい。
したがって		
△AED≡△BEC	………	1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい 2 つの三角形は合同である。
これより		
ED＝EC	………	合同な図形の対応する辺は等しい。

このように，あることを証明するときには，それまでに正しいと認められたことがらを使えばよい。

問 3 「右の図で，O が線分 AB, CD のそれぞれの中点ならば AC // DB である。」この証明を，次のような順序で考えました。
次の①～④の根拠となっていることがらをいいなさい。



△AOC と△BOD において

OA＝OB	……………………仮定
OC＝OD	……………………仮定
∠AOC＝∠BOD	……………………①
△AOC≡△BOD	……………………②

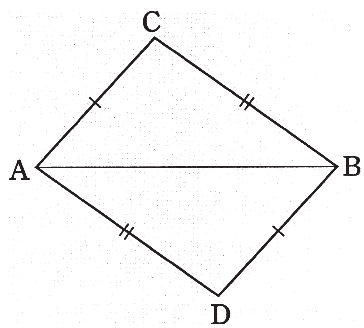
これより

∠OAC＝∠OBD	……………………③

したがって

AC // DB	……………………④

問 4 右の図で
AC＝BD, AD＝BC
のとき
AC // DB
です。



① 仮定と結論をいいなさい。
② 根拠となることがらを明らかにしながら証明しなさい。

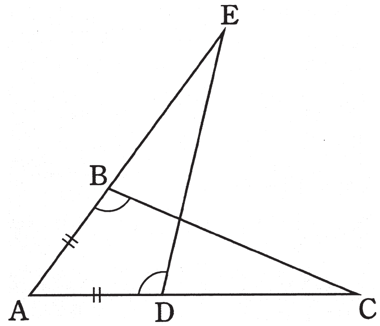
問 5 右の図で

AB＝AD，∠ABC＝∠ADE

ならば

BC＝DE，AC＝AE

となることを証明しなさい。



Q 上の問の「ならば」の前とあとを入れかえると

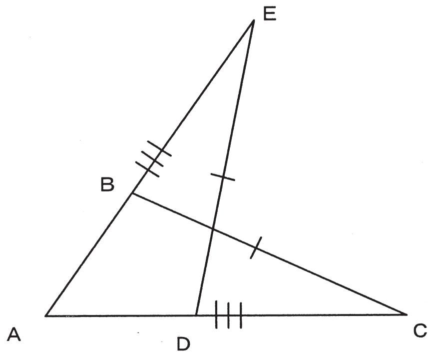
BC＝DE，AC＝AE

ならば

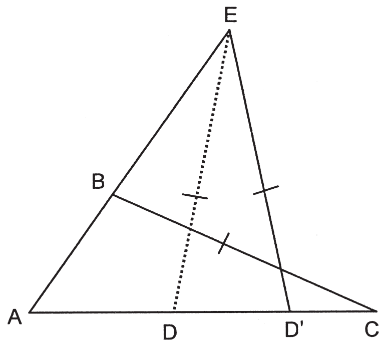
AB＝AD，∠ABC＝∠ADE

となります。

このことは証明できるでしょうか。



上の問では，△ABC と △ADE の合同を証明しなければなりません。命題の仮定では，同じ条件で右の図のように △AED′ も考えられてしまいます。したがって，かならずしもこの条件では，△ABC と △ADE が合同であることは証明できません。したがって，この命題は偽です。



上の**Q**のように，命題の仮定と結論を入れかえた命題を，もとの命題の**逆**といいます。すなわち

命題　「p ならば q」　の逆は　「q ならば p」　となります。

真である命題の逆は，いつでも真であるとはかぎりません。

問　6　右の図のように，∠A の大きさが 90° よりも大きいときも

　　AB＝AD

　　∠ABC＝∠ADE

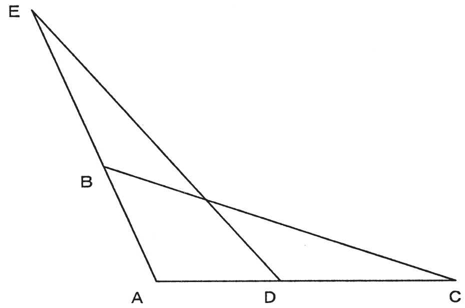
ならば

　　BC＝DE

　　AC＝AE

は真となります。

この命題の逆は真かどうか，考えてみなさい。



問　7　右の図で

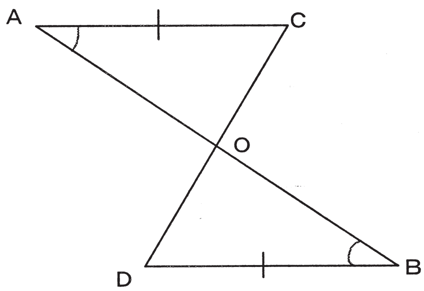
　　∠A＝∠B

　　AC＝BD

です。

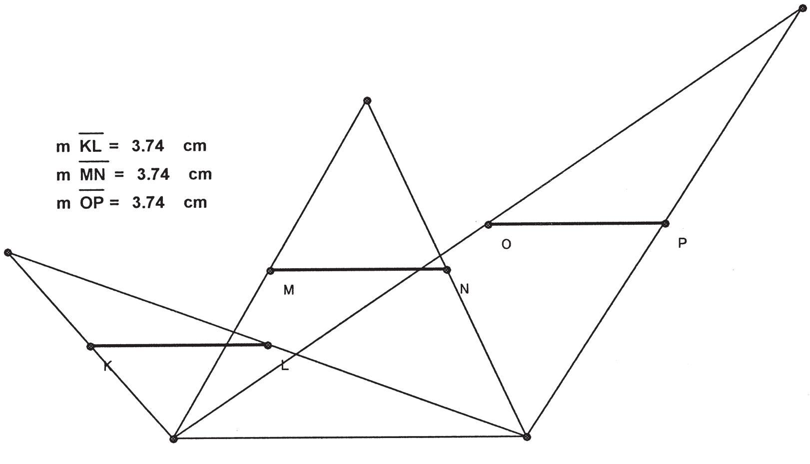
このとき，△AOC と △BOD は合同になります。

このことを証明しなさい。



第4単元

三角形と四角形



① 三角形

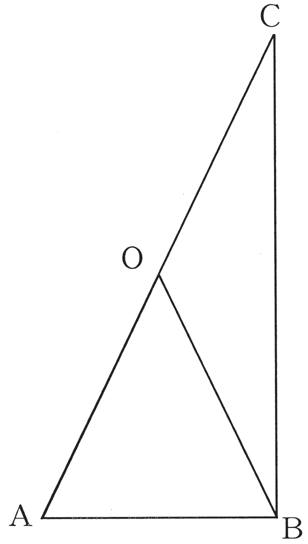
1 二等辺三角形の性質

Q 二等辺三角形を利用して，次のようにしてBの位置に直角をつくることができます。

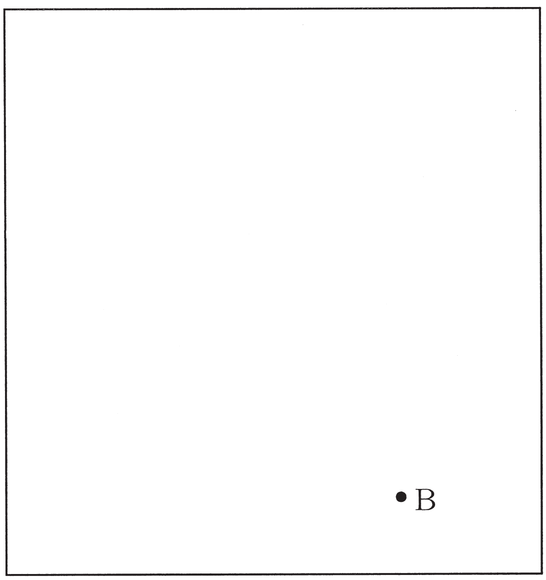
1 OA＝OBの二等辺三角形をかく。

2 AOを延長し，延長上にAO＝OCとなる点Cをとる。

3 点Bと点Cを結ぶ。



① この方法でBの位置に直角をつくってみましょう。



② 自分のかいた図で，∠ABCが直角になることを確かめてみましょう。

前ページのようにすれば，どんな場合にも $\angle ABC = 90°$ となるでしょうか。

$OA = OB = OC$ ですから

$\triangle OAB$，$\triangle OBC$

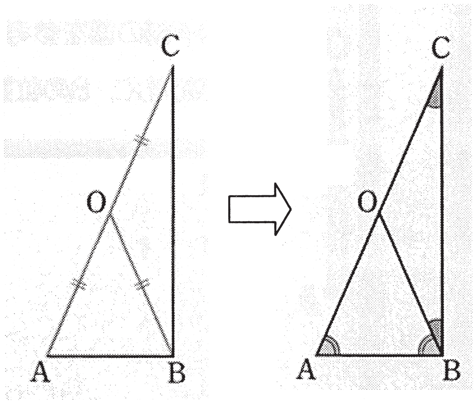
はどちらも二等辺三角形です。

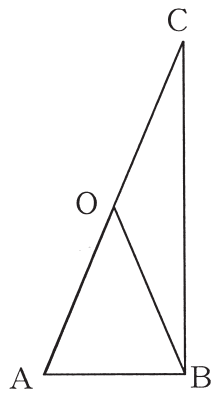
小学校で学んだように，二等辺三角形の2つの角は等しいことから

$\angle OAB = \angle OBA$

$\angle OBC = \angle OCB$

となっていることがわかります。





問　1　右の図で

$\angle OAB = \angle a$，$\angle OBC = \angle b$

として $\triangle ABC$ の内角の和を考え，それを使って，$\angle ABC = 90°$ となることを証明しなさい。

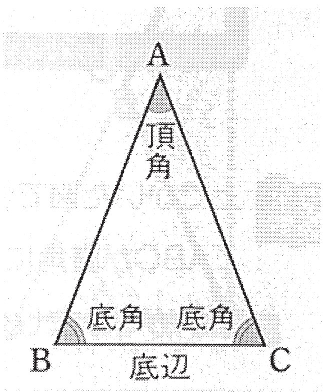
二等辺三角形で

長さの等しい2辺の間の角を**頂角**

頂角に対する辺を**底辺**

底辺の両端の角を**底角**

といいます。



上の問1の証明では，次のことがらを用いました。

(1)　2辺が等しい三角形を二等辺三角形ということ

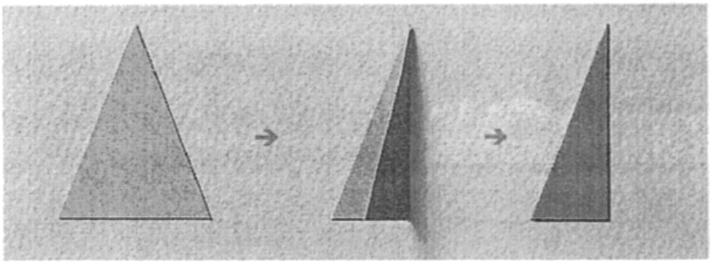
(2)　二等辺三角形の底角は等しいこと

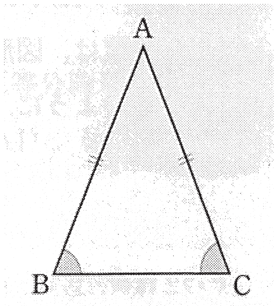
(3)　三角形の内角の和は180°であること

上の(1)のように，ことばの意味をはっきりと述べたものを**定義**といいます。

(3)は，前の章で平行線と角の関係を使って証明しました。

これに対し，(2)は，小学校で，二等辺三角形の紙を折ったり，角度をはかったりして確かめただけです。





そこで，(2)の

　　二等辺三角形の底角は等しい

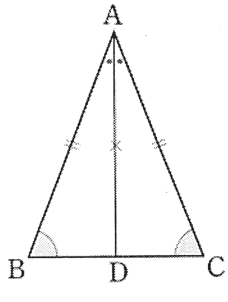
ことを証明してみましょう。

<考え方>

AB＝AC である △ABC を考え，∠B＝∠C であることを導けばよい。

Q「二等辺三角形の底角は等しい」ことの仮定と結論をいってみましょう。

<証明>



頂角∠A の二等分線をひき，底辺 BC との交点を D とする。

△ABD と △ACD において

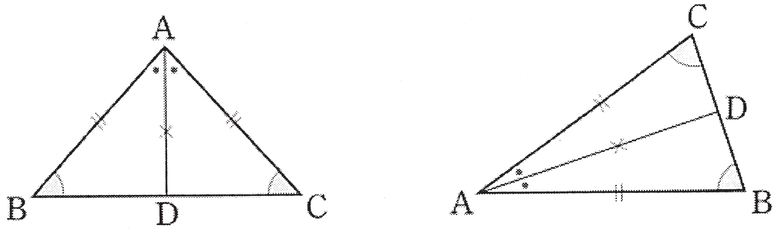
$$\begin{cases} AB = AC \\ AD \text{ は共通} \\ \angle BAD = \angle CAD \end{cases}$$

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから

　　△ABD≡△ACD

したがって　∠B＝∠C

前ページの証明は，AB＝ACのどんな△ABCについてもあてはまります。すなわち，どんな二等辺三角形であっても，底角は等しいといえます。



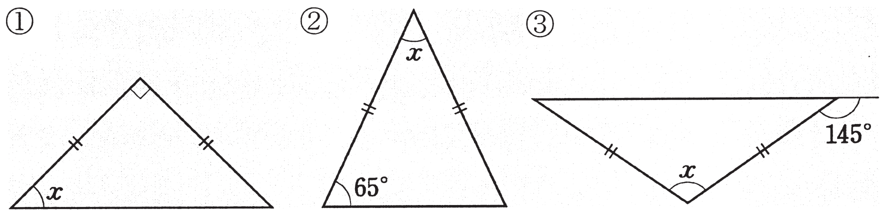
「二等辺三角形の底角は等しい」，「三角形の内角の和は 180° である」などの性質は，図形の性質を証明するときの根拠としてよく使われます。このような，証明されたことがらのうちで，大切なものを**定理**といいます。

●二等辺三角形の底角●

定理　二等辺三角形の底角は等しい。

▶▶　二等辺三角形の底角の性質を使って，角の大きさを調べてみましょう。

問 2　下の図で，同じ印をつけた辺は等しいとして，$\angle x$ の大きさを求めなさい。

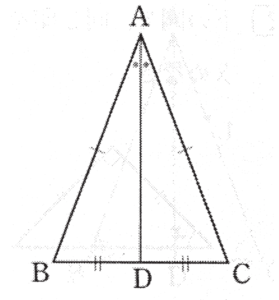


0° より大きく 90° より小さい角を**鋭角**，90° より大きく 180° より小さい角を**鈍角**といいます。また，①のような二等辺三角形を**直角二等辺三角形**といいます。

問 3　二等辺三角形の底角はかならず鋭角であるわけをいいなさい。

2　二等辺三角形の頂角の二等分線の性質

右の図のように二等辺三角形 ABC の頂角∠A の二等分線 AD をひくと，76 ページの証明から，△ABD と △ACD が合同になることがわかります。このことを使って，次のことがらを証明してみましょう。



> 二等辺三角形 ABC の頂角∠A の二等分線をひき，BC との交点を D とすると
>
> BD＝CD，AD⊥BC
>
> となる。

まず，△ABD≡△ACD で，合同な三角形の対応する辺が等しいことから

BD＝CD

を導くことができます。

問　1　右下の図について，下の $\boxed{\quad\quad}$ にあてはまる角を書き入れ，AD⊥BC となることの証明を完成しなさい。

＜証明＞

△ABD≡△ACD より，対応する角は等しいから

∠ADB＝ $\boxed{\quad\quad\quad}$ ･･････････････(1)

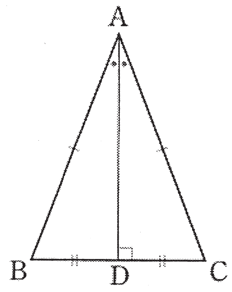
また

∠ADB＋ $\boxed{\quad\quad\quad}$ ＝180°　　････(2)

(1)，(2)から　　　2∠ADB＝180°

したがって　　　∠ADB＝ $\boxed{\quad\quad\quad}$

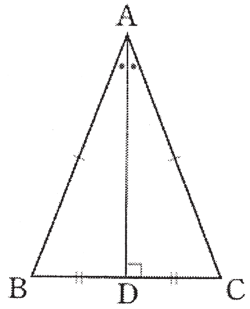
すなわち　　　　AD⊥BC



前ページで調べたことから，次の定理が得られます。

●二等辺三角形の頂角の二等分線●

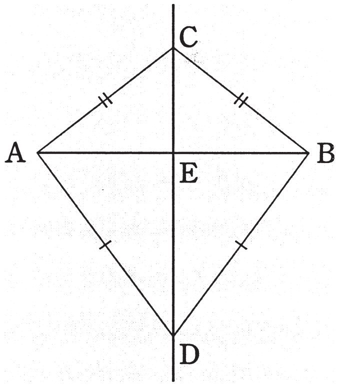
定理　二等辺三角形の頂角の二等分線は，底辺を垂直に２等分する。



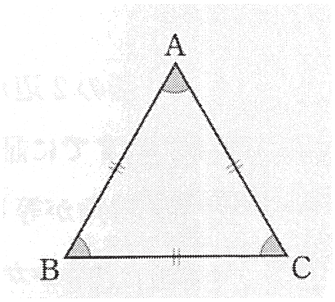
問　２　右の図で，CA＝CB，DA＝DB とします。

①　∠ACD＝∠BCD であることを証明しなさい。

②　①の結果から，CD が線分 AB の垂直二等分線であることを証明しなさい。



3 正三角形



正三角形の定義は

3 辺が等しい三角形

です。

正三角形の 3 つの内角が等しいことを証明してみましょう。

それには，△ABC で

仮定　AB＝BC＝CA

から

結論　∠A＝∠B＝∠C

を導けばよい。

問 1　△ABC を正三角形であるとして，次の $\boxed{}$ にあてはまる角を書き入れ，3 つの内角が等しいことの証明を完成しなさい。

<証明>

△ABC は，AB＝AC である二等辺三角形と考えられるから

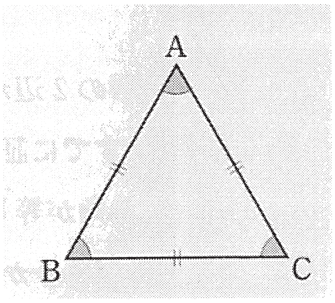
∠B＝ $\boxed{}$ ‥‥‥‥‥(1)

また，△ABC は，BA＝BC である二等辺三角形とも考えられるから

∠A＝ $\boxed{}$ ‥‥‥‥‥(2)

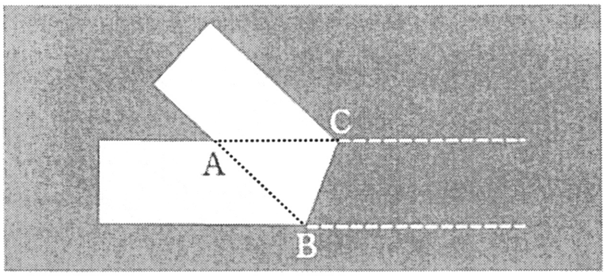
(1)，(2) から

∠A＝∠B＝∠C



4　二等辺三角形になるための条件

Q 紙テープを下の図のように折ったとき，重なった部分の三角形はどんな三角形になっているでしょうか。



問　1　上の △ABC では∠ABC＝∠ACB です。このわけをいいなさい。

三角形の 2 辺が等しいとき，2 つの角は等しい。

ということはすでに証明しました。逆に

2 つの角が等しい三角形の 2 辺は等しい。

といってよいでしょうか。

2 つの角が等しい三角形の 2 辺は等しいことを証明するには

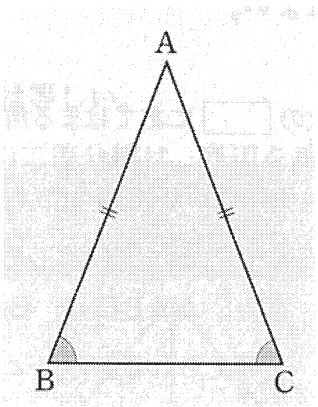
△ABC において

仮定　∠B＝∠C

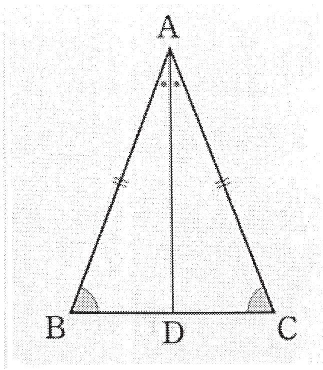
から

結論　AB＝AC

を導けばよい。



<証明>



∠A の二等分線をひき，BC との交点を D とする。

△ABD と △ACD において

$\angle B = \angle C$

$\angle BAD = \angle CAD$ ……(1)

三角形の内角の和は 180° であるから，残りの角も等しい。

したがって　$\angle ADB = \angle ADC$ ……(2)

また　AD は共通 ……(3)

(1)，(2)，(3)から，1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$

したがって　$AB = AC$

上の証明によって，次の定理が得られます。

●二等辺三角形になるための条件●

定理　三角形の 2 つの角が等しければ，その三角形は等しい 2 つの角を底角とする二等辺三角形である。

問 2　3 つの角が等しい三角形は正三角形です。このことを証明しなさい。

■定理の逆

二等辺三角形の底角の性質(ア)と，二等辺三角形になるための条件(イ)を比べてみましょう。

△ABC において，(ア)，(イ)は，それぞれ次のように表すことができます。

(ア)　$AB = AC$　ならば　$\angle B = \angle C$

(イ)　$\angle B = \angle C$　ならば　$AB = AC$

この(ア)と(イ)を比べると，仮定と結論が入れかわっています。

ある定理の仮定と結論を入れかえたものを，その定理の**逆**といいます。

すなわち　$\boxed{}$　ならば　$\boxed{\boxed{}}$

の逆は　$\boxed{\boxed{}}$　ならば　$\boxed{}$

です。

上の(イ)は(ア)の逆であり，(ア)は(イ)の逆です。

問　3　次のおのおのの逆をいいなさい。また，それが正しいかどうかもいいなさい。

①　$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$　ならば　$AB = DE$

②　正三角形の3つの角は等しい。

③　$x \geqq 5$　ならば　$x > 3$

上の問で調べたように，正しいことの逆はいつでも正しいとはかぎりません。したがって，ある定理の逆が正しいことをいうためには，あらためて，そのことを証明する必要があります。

問　4　BCを底辺とする二等辺三角形ABCにおいて，$\angle ABC$の二等分線が辺ACと交わる点をDとします。$\angle BAC = 36°$　として，次の問に答えなさい。

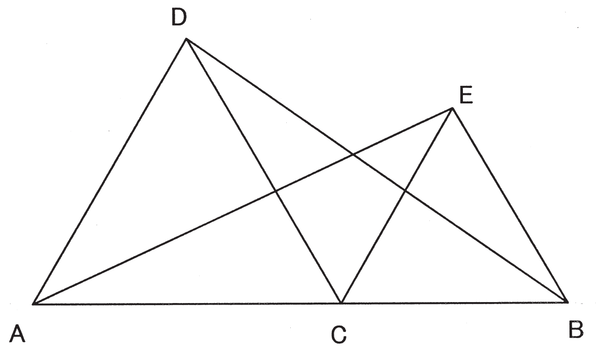
①　$\angle BAD$，$\angle DBC$，$\angle BDC$はそれぞれ何度になりますか。

②　$BC = BD$，$DA = DB$となるのはなぜですか。

問　5　$AB = AC$である二等辺三角形ABCの辺AB上に点Pをとり，Pを通るBCへの垂線が辺BC，辺CAの延長と交わる点をそれぞれM，Nとします。このとき，$\triangle ANP$は二等辺三角形になることを証明しなさい。

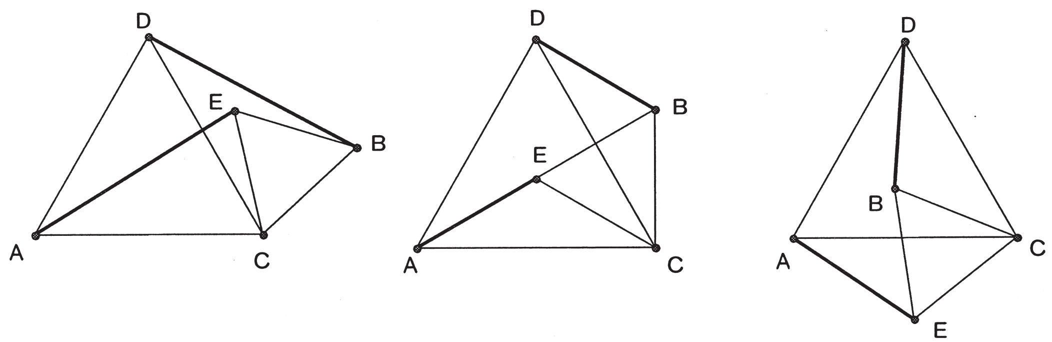
考えてみよう！

Q 線分 AB 上の１点を C とし，AC，CB をそれぞれ１辺とする正三角形 ACD と正三角形 CBE を下の図のようにつくれば，AE＝DB となります。
このことを証明してみましょう。



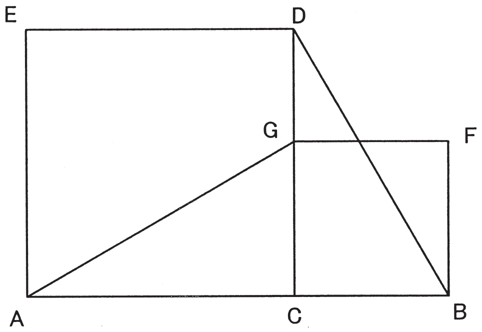
AE＝DB という関係が成り立つのは，A，C，B が１つの直線上にあるときだけでしょうか。

問　1　△CBE を，点 C を中心として回転させていろいろな位置にかき，AE＝DB という関係がどの場合にも成り立つかどうかを，GSP を使って調べてみなさい。



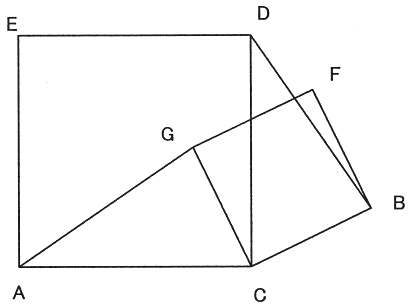
▶▶正三角形を正方形に変えても，同じようなことがいえるかどうか考えてみましょう。

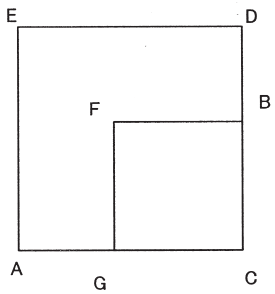
問　2　右の図は，**Ｑ**で，正三角形を正方形に変えたものです。このとき，AG＝DB が成り立つことを証明しなさい。

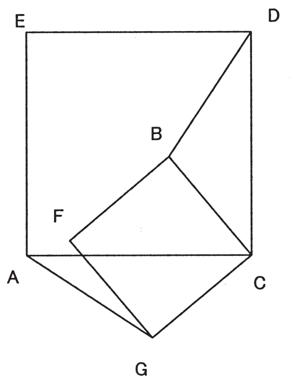


正三角形のときと同じように，正方形GCBFを点Cを中心に回転させてみましょう。

問　3　下のどの図においてもAG＝DBが成り立つことを証明しなさい。

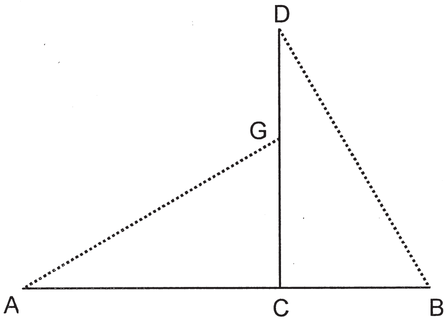




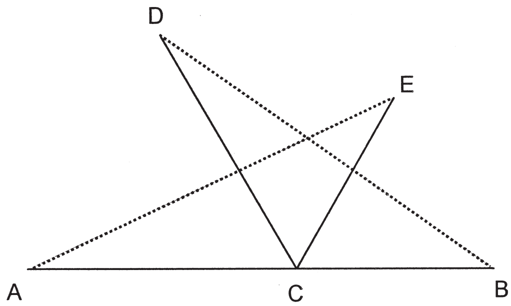


▶▶証明をふり返って調べてみましょう。

正方形のときの証明を正三角形のときの証明と比べてみると，証明の中で使われている図形の要素は, 正方形のときはCGとBC, ACとDC, ∠ACGと∠DCBです。正三角形のときも同様で，これら以外の要素は使われていません。



正方形のとき



正三角形のとき

証明の中に使われていない要素があるということは，それらの要素を変えても結論には変わりがないということです。正方形のとき，辺AEやED，あるいは，BF，GFも関係がありません。これらはどう変えても証明には何の影響もないはずです。このように考えると，この問題で述べられている図形は，正方形や正三角形だけでなく，正五角形でも正六角形でもよいことがわかります。あるいは，直角二等辺三角形でもおうぎ形でもよいのです。角も直角や60°である必要はありません。つまり，等しい2辺をふくむ図形であれば何でもよいのです。

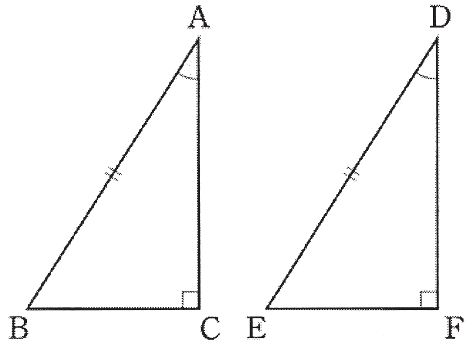
5 直角三角形の合同条件

2 つの直角三角形の辺や角にどんな関係があるとき，それらは合同になるか，調べてみましょう。

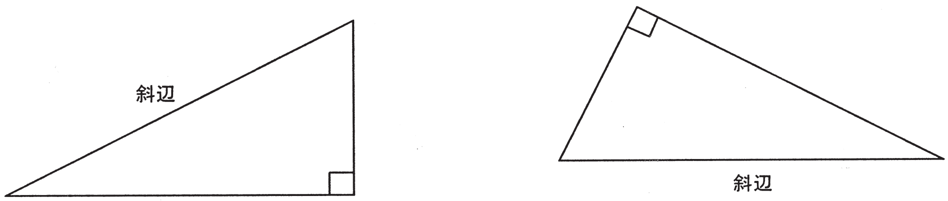
Q △ABC と △DEF で

$$\begin{cases} \angle C = \angle F = 90^\circ \\ AB = DE \\ \angle A = \angle D \end{cases}$$

ならば，△ABC≡△DEF といってよいでしょうか。



直角三角形の直角に対する辺を**斜辺**といいます。



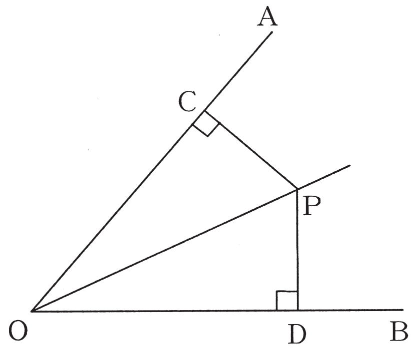
上の **Q** からわかるように，2 つの直角三角形は，斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいとき合同です。

問 1 ∠AOB の二等分線上の 1 点を P とし，P から OA，OB に垂線をひき，OA，OB との交点をそれぞれ C，D とすれば

PC＝PD

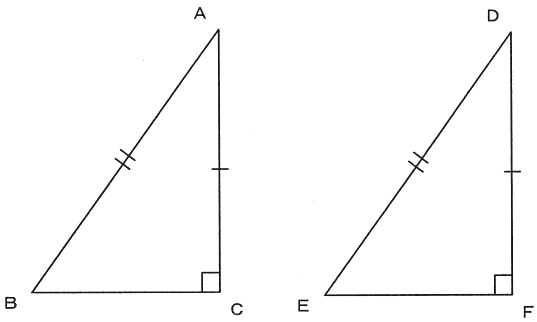
です。

このことを証明しなさい。



2 つの直角三角形は，斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しいときにも合同になります。

すなわち，△ABC と△DEF において



$\angle C = \angle F = 90°$

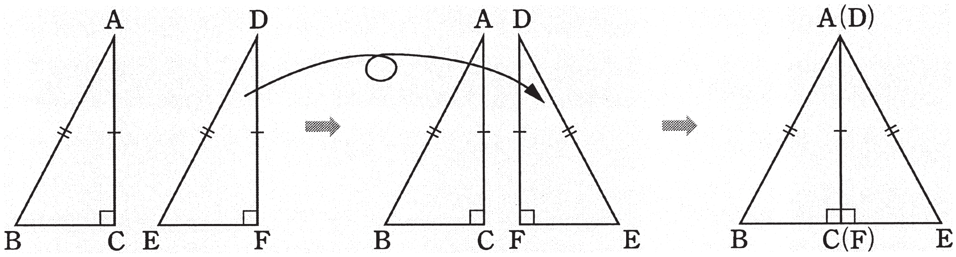
$AB = DE$

$AC = DF$

ならば，△ABC≡△DEF です。

このことを証明してみましょう。

AC=DF ですから，△DEF を裏返して，AC と DF を重ねることができます。このとき，$\angle C = \angle F = 90°$ ですから，$\angle BCE = 180°$ となって，3 点 B，C，E は 1 つの直線上にあります。



問 2 上の △ABE で，$\angle B = \angle E$ となるわけをいいなさい。また，このことを使って，△ABC≡△DEF となることを証明しなさい。

これまで調べたことから，次の定理が得られます。

●直角三角形の合同条件●

定理 2 つの直角三角形は，次の条件 1，2 のどちらかが成り立てば，合同である。

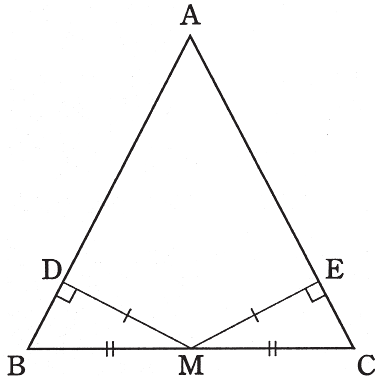
1 斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しい。

2 斜辺と他の 1 辺がそれぞれ等しい。

問　3　△ABC の辺 BC の中点 M から 2 辺 AB，AC に垂線をひき，AB, AC との交点をそれぞれ D, E とします。このとき

MD＝ME

であれば，△ABC は二等辺三角形です。このことを証明しなさい。



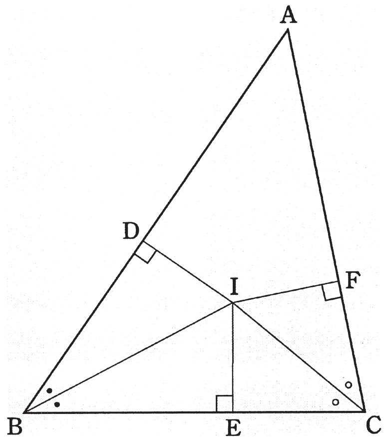
■三角形の内角の二等分線の交点

直角三角形の合同条件を使って，三角形の内角の二等分線の性質を調べてみましょう。

問 4 右の図のように，△ABC の∠B と∠C の二等分線の交点をＩとし，Ｉから３辺に垂線をひいて，AB，BC，CA との交点をそれぞれ D，E，F とします。

① ID＝IE＝IF であることを証明しなさい。

② 半直線 AI は∠BAC を２等分することを証明しなさい。



問４で証明したことから，次のことがいえます。

三角形の３つの内角の二等分線は１点で交わり，その点から３辺までの距離は等しい。

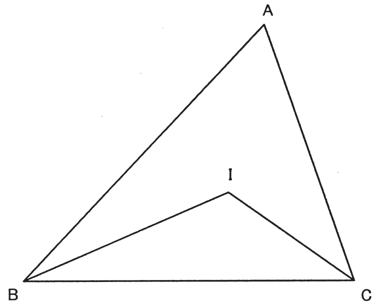
問 5 上の問の図を自分で作図し，Ｉを中心に IE を半径とする円をかき入れなさい。

問５でかいた円は△ABC の３辺に接しています。この円を△ABC の**内接円**といいます。また，Ｉのことを**内心**といいます。

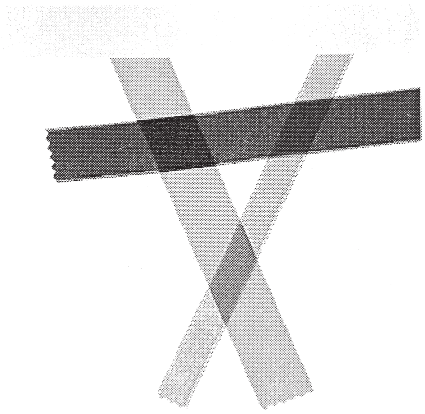
問 6 右の図で，点Ｉは△ABC の３つの内角の二等分線の交点であるとします。

① ∠A＝52° のとき，∠BIC は何度ですか。

② ∠A＝a° として，∠BIC を a を使って表しなさい。

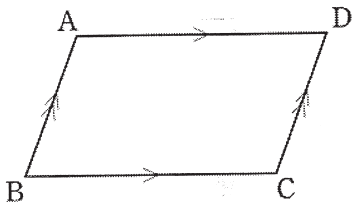


② 平行四辺形



1 平行四辺形の性質

Q 右の図のようにして，テープを重ねてみましょう。重なった部分はどんな図形になっているでしょうか。



四角形の向かい合う辺を**対辺**，向かい合う角を**対角**といいます。

平行四辺形の定義は

2 組の対辺がそれぞれ平行な四角形

です。平行四辺形 ABCD を ▱ABCD と書くことがあります。

上の平行四辺形の定義から，次の性質が導かれます。

●平行四辺形の性質●

定理 平行四辺形では

1 2 組の対辺はそれぞれ等しい。

2 2 組の対角はそれぞれ等しい。

3 対角線はそれぞれの中点で交わる。

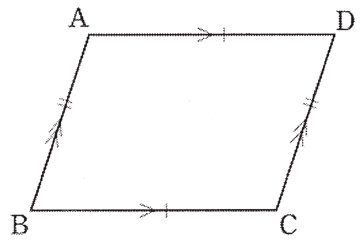
問 1 四角形 ABCD が平行四辺形であるという仮定は

$AB /\!/ DC,\ AD /\!/ BC$

と表されます。上の 1 ， 2 について，その結論を式で表しなさい。

平行四辺形の性質 $\boxed{1}$ を証明してみましょう。

<考え方> ▱ABCDについて



仮定　$AB \parallel DC$，$AD \parallel BC$

から

結論　$AB = DC$，$AD = BC$

を導けばよい。

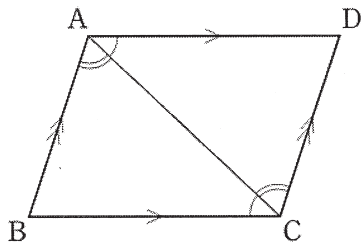
そのために，対角線ACをひき

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

を導きます。

仮定				結論
$AB \parallel DC$ $AD \parallel BC$	⇨	$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$	⇨	$AB = DC$ $AD = BC$

<証明> 対角線ACをひく。



△ABCと△CDAにおいて

ACは共通

平行線の錯角は等しいから

$\angle BCA = \angle DAC$

$\angle BAC = \angle DCA$

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

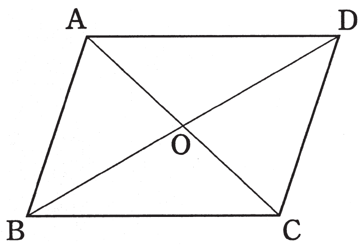
$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$

したがって

$AB = DC$，$AD = BC$

問　2　平行四辺形の性質 $\boxed{2}$ を証明しなさい。

次に，▱ABCD について，対角線 AC と BD の交点を O とし，平行四辺形の性質$\boxed{3}$を証明してみましょう。



問　3　上の平行四辺形について，平行四辺形の性質$\boxed{3}$の仮定と結論をいいなさい。

この証明は，たとえば，次のようにかきます。

証明　△ABO と △CDO において

平行四辺形の対辺はそれぞれ等しいから

AB＝CD

平行線の錯角は等しいから

∠ABO＝∠CDO

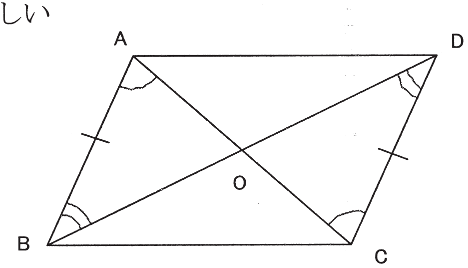
∠BAO＝∠DCO

1辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

△ABO≡△CDO

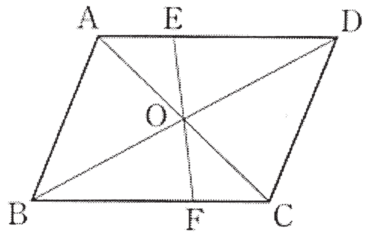
したがって

OA＝OC，OB＝OD



▶▶平行四辺形の性質を使って，いろいろなことがらを証明しましょう。

例 1 ▱ABCD の対角線の交点を O とし，O を通る直線が AD，BC と交わる点を，それぞれ E，F とすれば，OE＝OF となります。このことを証明しなさい。



<証明> △AOE と △COF において

平行四辺形の対角線はそれぞれの中点で交わるから

OA＝OC

対頂角は等しいから　∠AOE＝∠COF

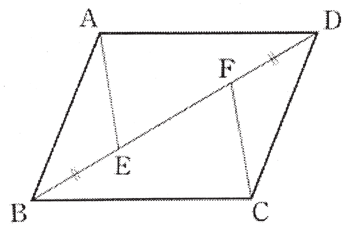
平行線の錯角は等しいから　∠EAO＝∠FCO

1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから

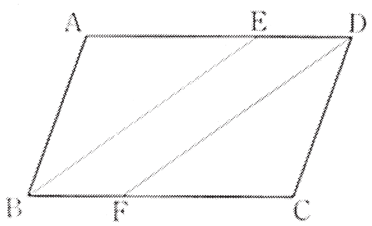
△AOE≡△COF

したがって　OE＝OF

問 4 ▱ABCD の対角線 BD 上に BE＝DF となるように 2 点 E, F をとると，AE＝CF となります。このことを証明しなさい。



問 5 右の図の▱ABCD において，∠B，∠D の二等分線が辺 AD，BC とそれぞれ E, F で交わっています。このとき BE // FD であることを証明しなさい。



2　平行四辺形になるための条件

これまでは，平行四辺形の定義からいろいろな性質を導きました。ここでは逆に，四角形にどんな条件があれば平行四辺形になるか考えてみましょう。

●平行四辺形になるための条件●

定理　四角形は，次の 1 ～ 5 のうちのどれかが成り立てば，平行四辺形である。

1　2組の対辺がそれぞれ平行である。　………定義

2　2組の対辺がそれぞれ等しい。

3　2組の対角がそれぞれ等しい。

4　対角線がそれぞれの中点で交わる。

5　1組の対辺が平行でその長さが等しい。

1 は定義ですから，2 ～ 5 について証明すればよい。

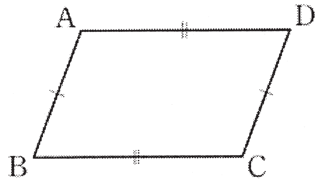
四角形ABCDについて，2を証明するためには

仮定　AB＝DC，AD＝BC

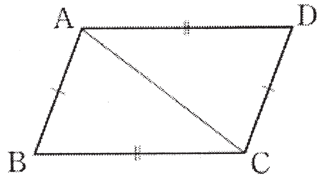
から

結論　AB∥DC，AD∥BC

を導けばよい。



AB∥DCを導くためには，対角線ACをひき，錯角∠BACと∠DCAが等しいことを示せばよい。



問　1　平行四辺形になるための条件 2 を証明しなさい。

次に，四角形ABCDについて

∠A＝∠C，∠B＝∠D

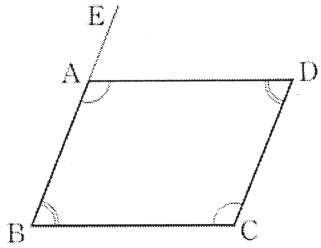
であるとして，平行四辺形になるための条件 3 を証明しましょう。

<証明>　四角形の内角の和は360°であるから

$$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$$

また，∠A＝∠C，∠B＝∠D であるから

$$\angle A+\angle B+\angle A+\angle B=360°$$



したがって

$$\angle A+\angle B=180° \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

いっぽう，頂点 A における外角∠DAE をつくると

$$\angle DAE+\angle DAB=180° \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)，(2)から

$$\angle DAE=\angle B$$

同位角が等しいから

$$AD /\!/ BC$$

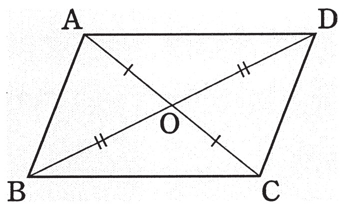
同様にして　AB∥DC

●注意　「同様にして～」は，同様な手順で証明できるという意味です。

問　2　四角形 ABCD の対角線の交点を O とし

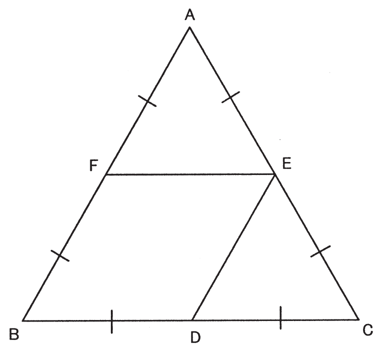
OA＝OC，OB＝OD

であるとして，平行四辺形になるための条件 4 を証明しなさい。



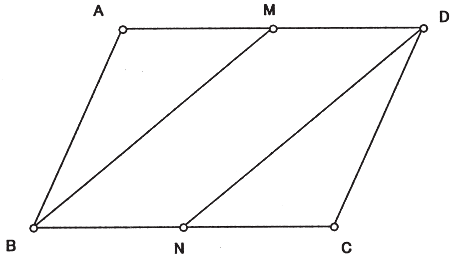
問　3　AB∥DC，AB＝DC である四角形 ABCD について，平行四辺形になるための条件 5 を証明しなさい。

問　4　正三角形 ABC の辺 BC，CA，AB の中点をそれぞれ D，E，F とすれば，四角形 BDEF は平行四辺形です。このことを証明しなさい。



考えてみよう！

Q 平行四辺形 ABCD の 1 組の対辺 AD，BC の中点をそれぞれ M，N とすれば，四角形 MBND は平行四辺形です。このことを証明してみましょう。



上のことは，平行四辺形になるための条件 $\boxed{1}$ ～ $\boxed{5}$ のどれを使っても証明することができます。

<証明１>　四角形 MBND において

MD // BN

MD＝BN　………(a)

したがって，1 組の対辺が平行でその長さが等しいから，

四角形 MBND は平行四辺形である。

<証明２>　四角形 ABCD は平行四辺形であるから　MD // BN

△ABM と △CDN において

AM＝CN　………(b)

∠A＝∠C　………(c)

AB＝CD　………(d)

2 辺とその間の角がそれぞれ等しいから　………(e)

△ABM≡△CDN

対応する角は等しいから　∠AMB＝∠CND

平行線の錯角は等しいから　∠CND＝∠ADN

したがって　∠AMB＝∠ADN

同位角が等しいから　BM // ND

2 組の対辺がそれぞれ平行であるから，四角形 MBND は平行四辺形である。

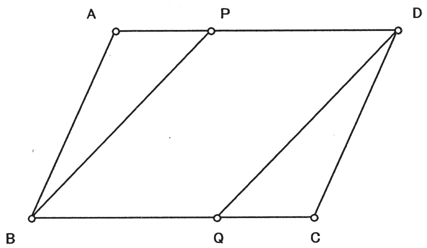
問　1　前ページの **Q** を，ほかの平行四辺形になるための条件を用いて証明しなさい。

証明 1 では，MD//BN は，平行四辺形の定義ですから，変えることができません。また，(a)は，AD＝BC から，$\frac{1}{2}$AD＝$\frac{1}{2}$BC　となり，等しいことがいえますが，$\frac{1}{2}$ でなければならないことはありません。

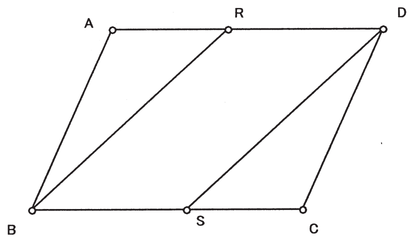
そこで次のようにして，問題を変えることができます。

1　M，N がそれぞれ AD，BC の中点という条件を変える。

問題①　AP，CQ の長さは，AD，BC のそれぞれ $\frac{1}{3}$ であるとします。このとき，四角形 PBQD が平行四辺形であることを証明しなさい。



問題②　AR＝CS　とします。四角形 RBSD が平行四辺形であることを証明しなさい。

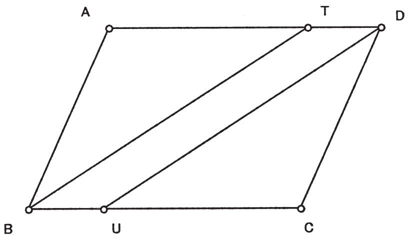


次に，証明 2 をみなおしてみましょう。

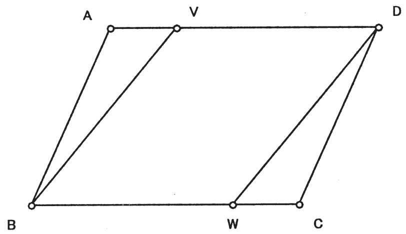
(c)の∠A＝∠C，(d)の AB＝CD は変えることができません。しかし，(b)は，(a)と同様に，等しければよいので $\frac{1}{2}$ である必要はありません。したがって，上の問題①，問題②のような問題がつくれます。

合同条件(e)をみてみると，この証明では「2 辺とその間の角がそれぞれ等しい」を使っていますが，合同条件は 3 つあるので，「1 辺とその両端の角がそれぞれ等しい」に変えてみます。すると次の問題③，④がつくれます。なお，「3 辺がそれぞれ等しい」にしてもおもしろ味がないので，ここでは考えないことにします。

問題③ BT，DU は，∠ABC，∠ADC のそれぞれ二等分線とします。
四角形 TBUD が平行四辺形であることを証明しなさい。



問題④ ∠ABV＝∠CDW とします。
四角形 VBWD が平行四辺形であることを証明しなさい。



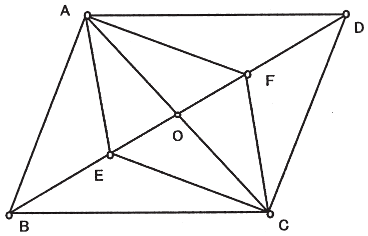
証明 2 は，三角形の合同が証明できればよいのです。つまりこの証明では，合同が決まることが大切です。そこで，合同条件を変えることによって，問題③，④のような問題が考えられます。

ここで，これまで出てきた 4 つの問題を共通した観点でながめてみましょう。

これらは平行四辺形が点対称な図形であるという性質に依存していることがわかってきます。点対称の中心は対角線の交点ですから対角線に注目してみます。すると，次のような問題が考えられます。

2 平行四辺形を点対称な図形として考える。

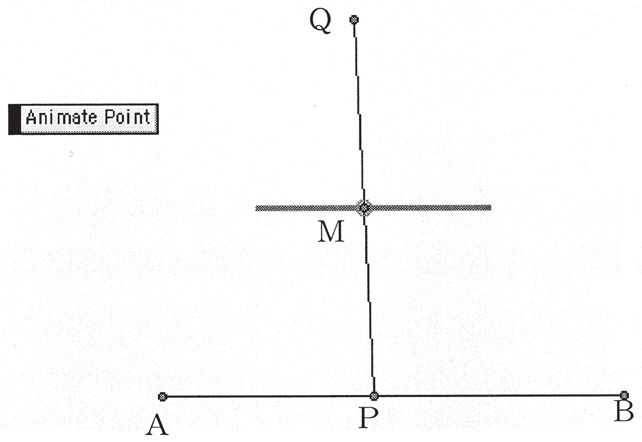
問題⑤ OE＝OF として四角形 AECF が平行四辺形であることを証明しなさい。



➲➲ **Q** の問題の条件をいろいろ変えて，問題をつくってみなさい。

3 中点連結定理

Q 下の図のように線分 AB 上に点 P をとり，AB 上にない点 Q と結びます。そして，PQ の中点を M とし，点 P を AB 上で動かしたとき，点 M が動いてできる図形を観察しましょう。



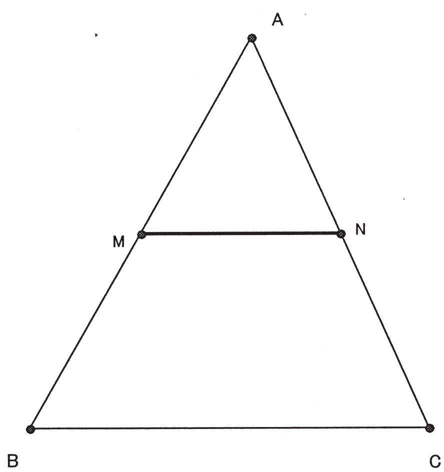
① GSP を使ってこの図をつくり，Animation 機能を使って点 P を動かしてみましょう。

② 点 M が動いてできた線分は，AB とどんな関係があるでしょうか。

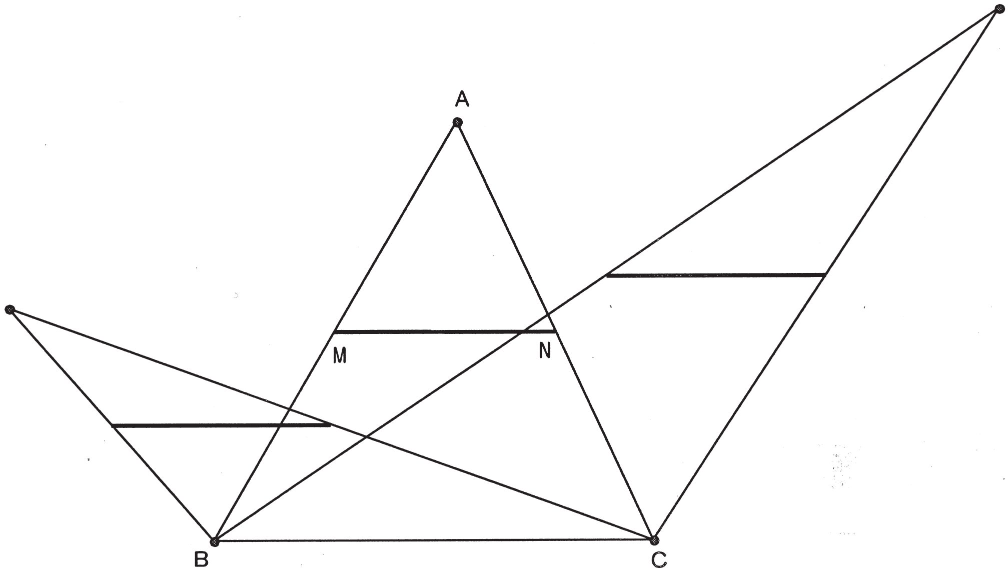
問 1 右の図のように，△ABC の AB, AC のそれぞれの中点 M, N を結び，頂点 A をいろいろなところへ動かします。

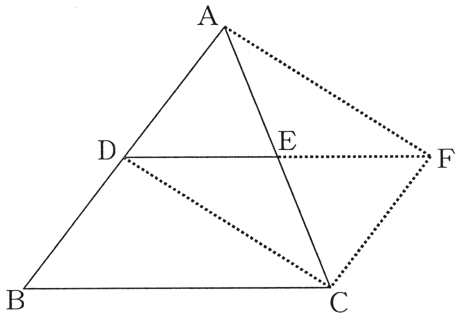
① MN の長さがどのように変化するか調べなさい。

② MN は，BC とどんな関係にあるか調べなさい。



Measure 機能を使ってMN の長さをはかってみると，頂点A をどこに動かしても，MN の長さは変わらないことがわかります。





問 2 △ABC の辺 AB，AC の中点をそれぞれ D，E とすると

$$DE /\!/ BC,\ DE = \frac{1}{2}BC$$

となります。このことを次の順序で証明しなさい。

$\boxed{1}$ DE の延長上に EF＝DE となる点 F をとると，四角形 ADCF が平行四辺形となることを証明する。

$\boxed{2}$ 四角形 DBCF が平行四辺形となることを証明し，$DE /\!/ BC$，$DE = \frac{1}{2}BC$ を導く。

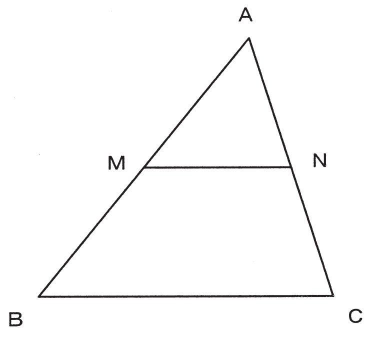
上で証明したことから，次ページの定理が成り立ちます。これを**中点連結定理**といいます。

●中点連結定理●

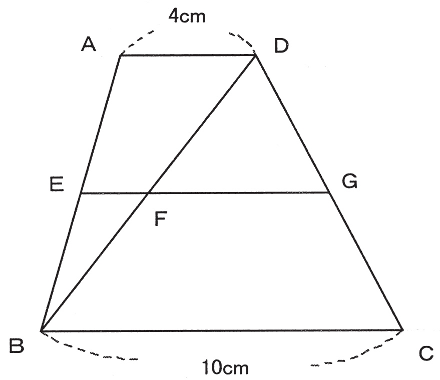
定理　△ABC の 2 辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とすると，次の関係が成り立つ。

$MN /\!/ BC$

$MN = \frac{1}{2} BC$



問　3　右の図は，AD∥BC の台形 ABCD で，AB の中点を E とし，E から辺 BC に平行な直線をひき，BD，CD との交点をそれぞれ F，G としたものです。
EF，EG の長さを求めなさい。



$\boxed{4}$ 特別な四角形

▶▶長方形，ひし形，正方形などの四角形について調べてみましょう。

長方形とは，4 つの角がみな直角である四角形のことです。

ひし形とは，4 つの辺がみな等しい四角形のことです。

Q 長方形やひし形は平行四辺形です。そのわけを考えてみましょう。

長方形やひし形は，平行四辺形の特別な場合であるといえます。これらの対角線について，次のことが成り立ちます。

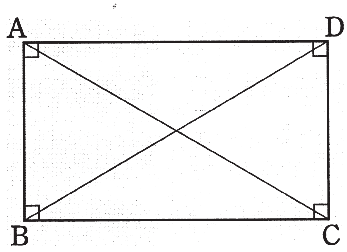
$\boxed{1}$ 長方形の対角線は等しい。

$\boxed{2}$ ひし形の対角線は垂直に交わる。

$\boxed{\text{問　1}}$ 長方形 ABCD の対角線 AC，BD をひき

$$\triangle ABC \equiv \triangle DCB$$

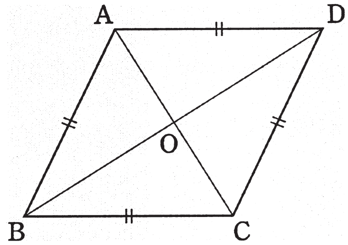
を導き，上の$\boxed{1}$が成り立つことを証明しなさい。



$\boxed{\text{問　2}}$ ひし形 ABCD の対角線 AC，BD の交点を O として

$$\triangle ABO \equiv \triangle ADO$$

を導き，上の$\boxed{2}$が成り立つことを証明しなさい。



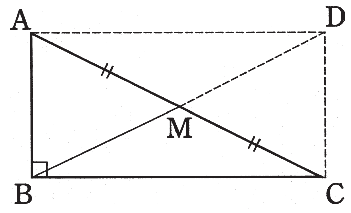
長方形の対角線の性質を使うと，次のことが証明できます。

直角三角形の斜辺の中点は，この三角形の 3 つの頂点から等しい距離にある。

問　3　直角三角形 ABC において，斜辺 AC の中点を M とすれば

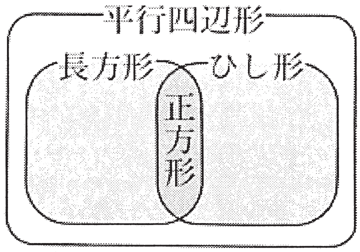
MA＝MB＝MC

です。このことを証明しなさい。



正方形とは，4 つの角がみな直角で，4 つの辺がみな等しい四角形のことです。

すなわち，長方形であり，かつ，ひし形でもある四角形が正方形です。したがって，正方形は長方形とひし形の両方の性質をもっています。



▶▶　平行四辺形にどんな条件をつけ加えれば，長方形，ひし形，正方形になるでしょうか。

問　4　次の①～④の平行四辺形は，それぞれどんな四角形になりますか。

①　∠A＝90°　である　▱ABCD

②　AB＝BC　である　▱ABCD

③　AC＝BD　である　▱ABCD

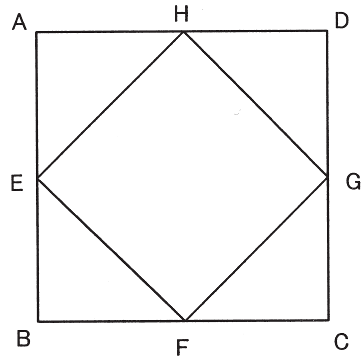
④　AC⊥BD　である　▱ABCD

問　5　次の(1)，(2)の条件をともにみたす平行四辺形は，正方形であるといってよいですか。

(1)　対角線が等しい。

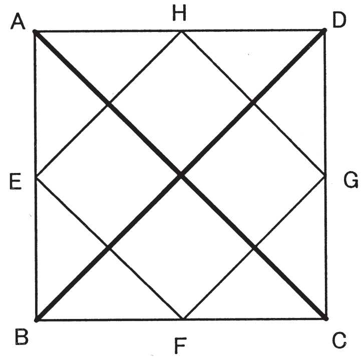
(2)　対角線が垂直に交わる。

Q 正方形ABCDの辺AB，BC，CD，DAの中点をそれぞれE，F，G，Hとするとき，なかにできる四角形EFGHはどんな四角形になるか，GSPを使って調べてみましょう。



GSPで調べてみると，四角形EFGHは正方形になります。このことを証明してみましょう。

<証明>



右の図のように，正方形ABCDの対角線AC，BDをひきます。

△ABD，△CBDにおいて

E，Hはそれぞれ AB，ADの中点

F，Gはそれぞれ BC，CDの中点

であるから，中点連結定理により

$EH=\frac{1}{2}BD$ …(1)　　$FG=\frac{1}{2}BD$ …(2)

$EH /\!/ BD$ …(3)　　$FG /\!/ BD$ …(4)

(1)，(2)より　　$EH=FG$ …(5)

同様にして

$EF=HG$ …(6)

$EF /\!/ AC$ …(7)　　$HG /\!/ AC$ …(8)

また，正方形の対角線の長さは等しいから　$AC=BD$

したがって，(5)，(6)より　$EH=FG=EF=HG$

また，正方形の対角線は垂直に交わるから，その対角線とそれぞれ平行な直線どうしも垂直に交わる。したがって，(3)，(4)，(7)，(8)より

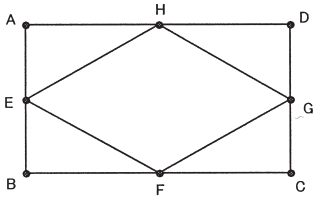
$\angle HEF=\angle EFG=\angle FGH=\angle GHE=90^\circ$

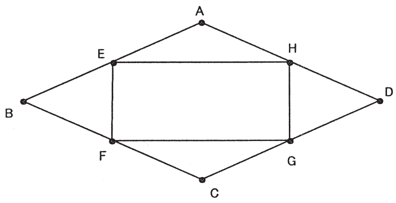
4つの辺が等しく，4つの角がみな直角である四角形は，正方形である。

したがって，四角形EFGHは正方形である。

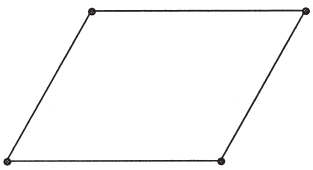
▶▶前ページの問題について，GSP を使って，正方形をいろいろな四角形に変えて，なかにできる四角形がどんな図形になるか調べてみよう。

問　6　長方形，ひし形の各辺の中点をとって，それを結んだ四角形はどんな四角形になりますか。また，なぜそうなるかを証明しなさい。

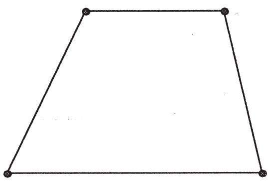




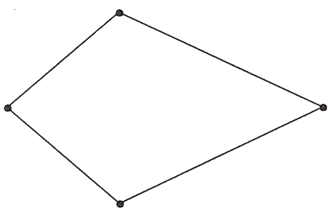
問　7　その他の図形ではどのようになりますか。実際に調べてみなさい。



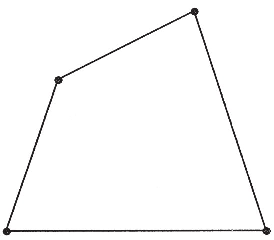
平行四辺形



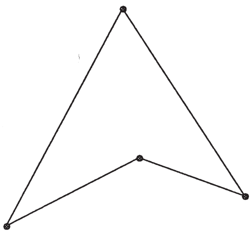
台形



たこ形四角形

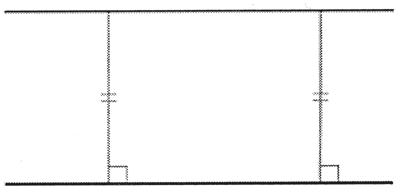


一般の四角形



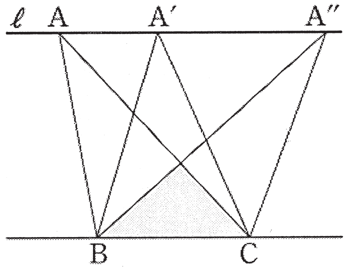
凹四角形

5 等積変形



1 組の平行線があるとき，一方の直線上の 2 点から他の直線にひいた 2 つの垂線の長さは等しい。

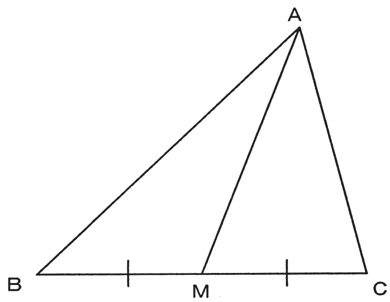
すなわち，平行線間の距離は一定です。このことは，長方形の対辺が等しいことから明らかです。



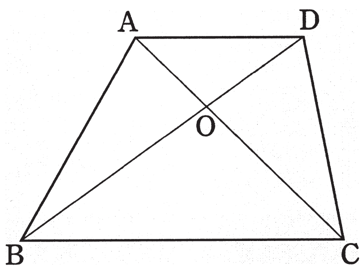
右の図のように，底辺 BC を共有し，BC に平行な直線 ℓ 上に頂点をもつ△ABC，△A′BC，△A″BC を考えてみましょう。

これらの三角形は，底辺が同じで高さが等しいから，その面積は等しくなります。すなわち

$$\triangle ABC = \triangle A'BC = \triangle A''BC$$



問 1 右の図で，M は BC の中点です。このとき，面積の等しい三角形をみつけ，そのことを式で表しなさい。



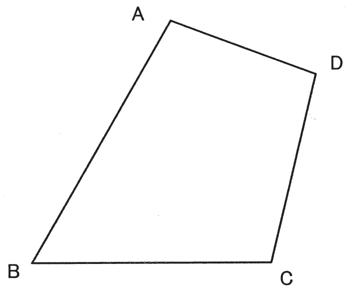
問 2 AD∥BC である台形 ABCD の対角線の交点を O とすれば，

$$\triangle AOB = \triangle DOC$$

です。このことを証明しなさい。

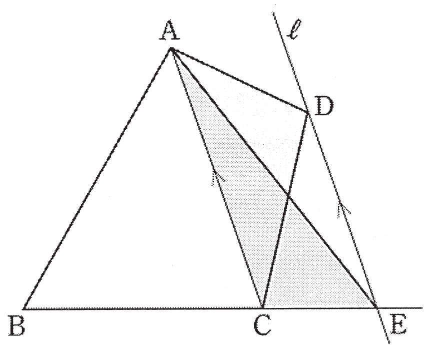
▶▶次に，面積を変えずに多角形の形を変えることを考えてみましょう。

右の図のような四角形ABCDの面積を2等分する直線で，頂点Aを通る直線をひいてみましょう。



まず，次のようにして，あたえられた四角形 ABCD と面積が等しい三角形をつくってみましょう。

頂点Dを通って対角線ACに平行な直線ℓをひき，ℓと辺BCの延長との交点をEとすると，△ABEと四角形ABCDとは面積が等しくなります。



このように，面積を変えずに図形の形を変えることを**等積変形**といいます。

問　3　上の図で

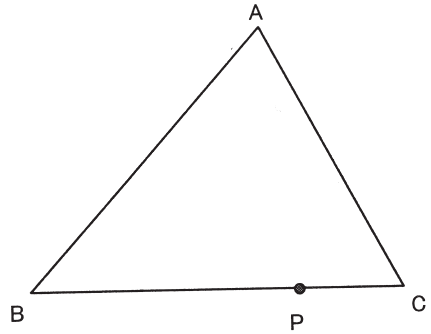
四角形ABCD＝△ABE

となることを証明しなさい。

次に，頂点AとBEの中点を結ぶ直線をひくと，この直線は，△ABEをちょうど2等分します。したがって，この直線が四角形ABCDの面積を2等分する直線となります。

問　4　かってな四角形をかき，この四角形の頂点の1つを通り，面積を2等分する直線を，上の手順でひいてみなさい。

例　1　△ABC があたえられているとき，辺 BC 上の点 P を通って，△ABC の面積を 2 等分する直線を，次の順序でひいてみましょう。



$\boxed{1}$　P と A を結ぶ。

$\boxed{2}$　BC の中点 M を通って，AP に平行な直線をひき，辺 AB または AC との交点を Q とする。

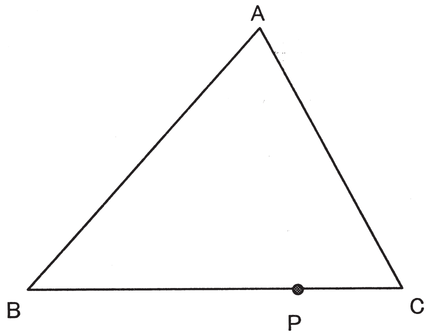
$\boxed{3}$　P と Q を結ぶ。

このとき，直線 PQ は △ABC の面積を 2 等分します。

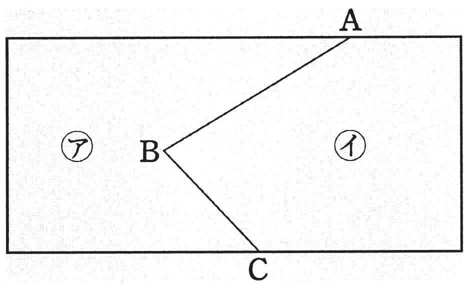
問　5　上の手順で直線 PQ をかき，次のことを証明しなさい。

① △ABM＝△ACM

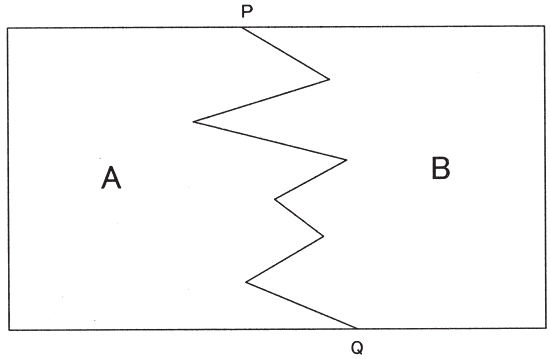
② △BPQ＝ 四角形 AQPC



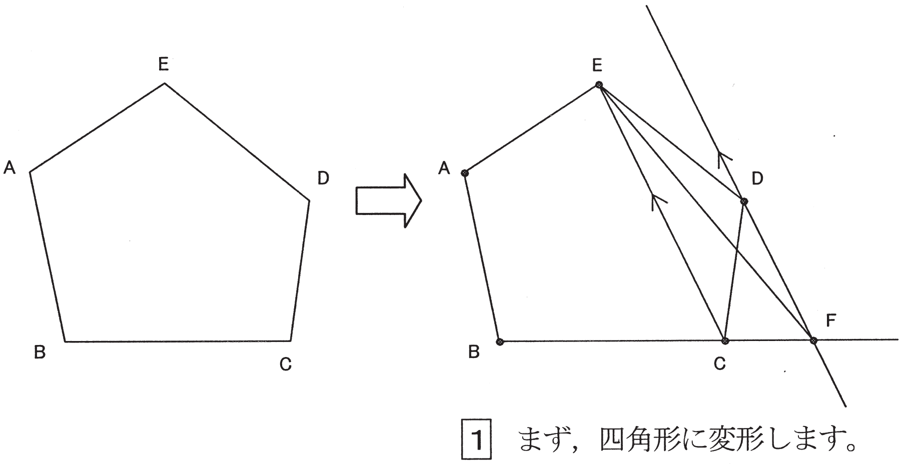
問　6　下の図のように，長方形が折れ線 ABC で 2 つの部分㋐，㋑に分かれています。点 A を通り，㋐，㋑それぞれの部分の面積を変えないような直線をひきなさい。



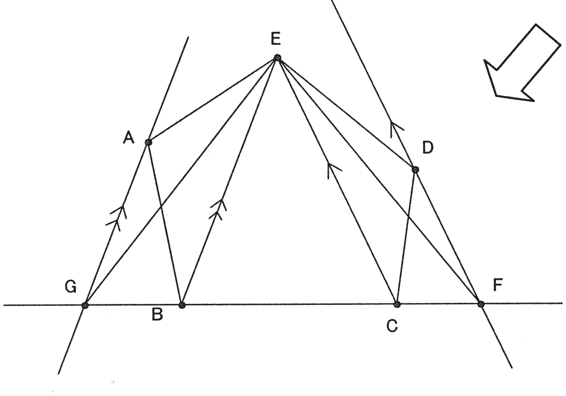
問 7 下の図のように，ギザギザな線で長方形が 2 つの部分 A と B に分かれています。点 P を通り，それぞれの部分の面積を変えないような直線を，問 6 を参考にしてひきなさい。



例 2 下の図の五角形 ABCDE を，三角形に等積変形してみましょう。

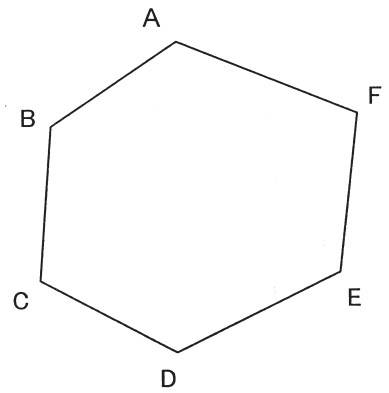


1 まず，四角形に変形します。



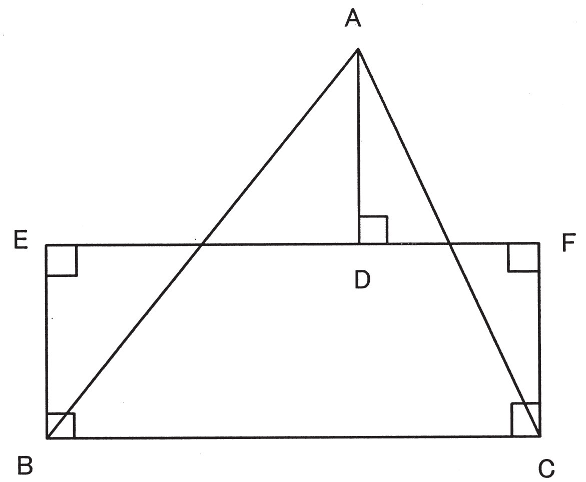
2 もう一度等積変形をして △EGF をつくります。

問　8　例2を参考にして，右のような六角形ABCDEFを三角形に等積変形しなさい。



▶▶次に，三角形を長方形に等積変形してみましょう。

問　9　三角形を，下の図のようにして，長方形に等積変形しました。その方法を説明しなさい。また，その方法で，長方形に等積変形できるわけをいいなさい。



すべての三角形は，それと面積が等しい長方形に変形することができます。したがって，すべての多角形は，等積変形で三角形になおすことができ，さらに長方形に等積変形することができます。

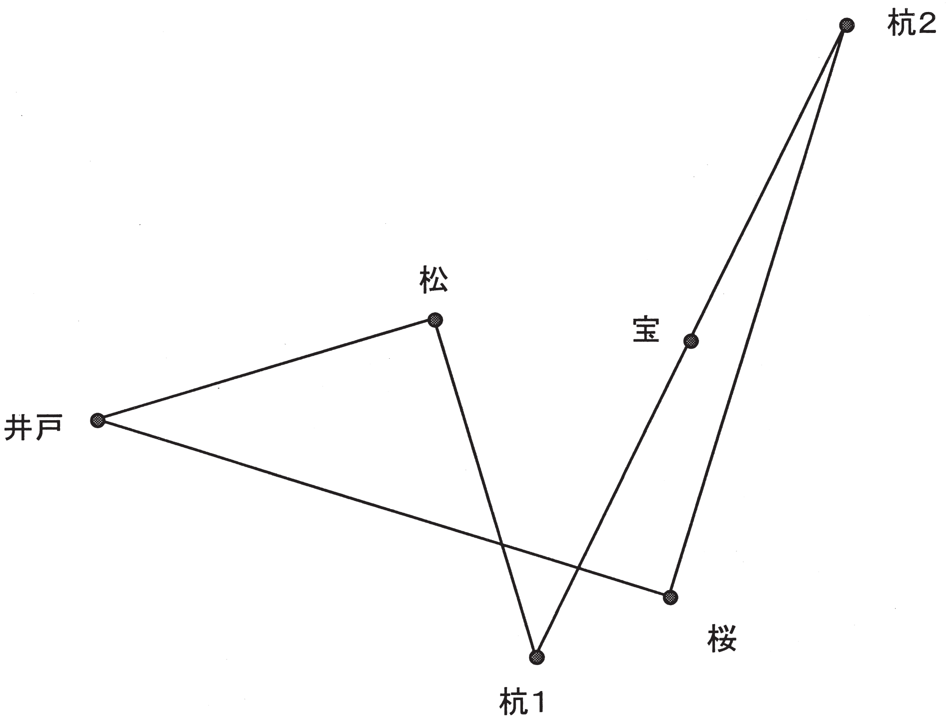
問　10　かってな三角形をかき，それを長方形に等積変形しなさい。

やってみよう！　宝のありかは？

古い巻物が見つかりました。そこには宝の隠し場所が書かれているようです。

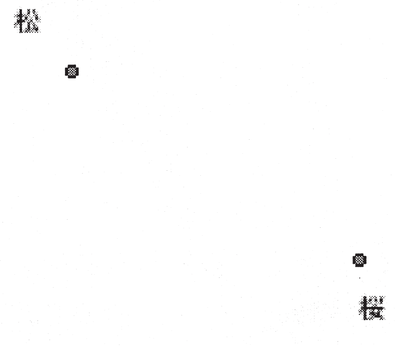
ある島に，井戸と松の木と桜の木がある。井戸から松の木へ線分をひけ。
そこから右へ90°曲がり，同じ長さだけ進み，そこに杭を打て。
井戸から桜の木へ線分をひけ。
そこから左へ90°曲がり，同じ長さだけ進み，そこに杭を打て。
2本の杭の中点に宝は隠されている。

GSPで，井戸と松の木と桜の木の位置を決めて，宝の隠し場所を探してみよう。

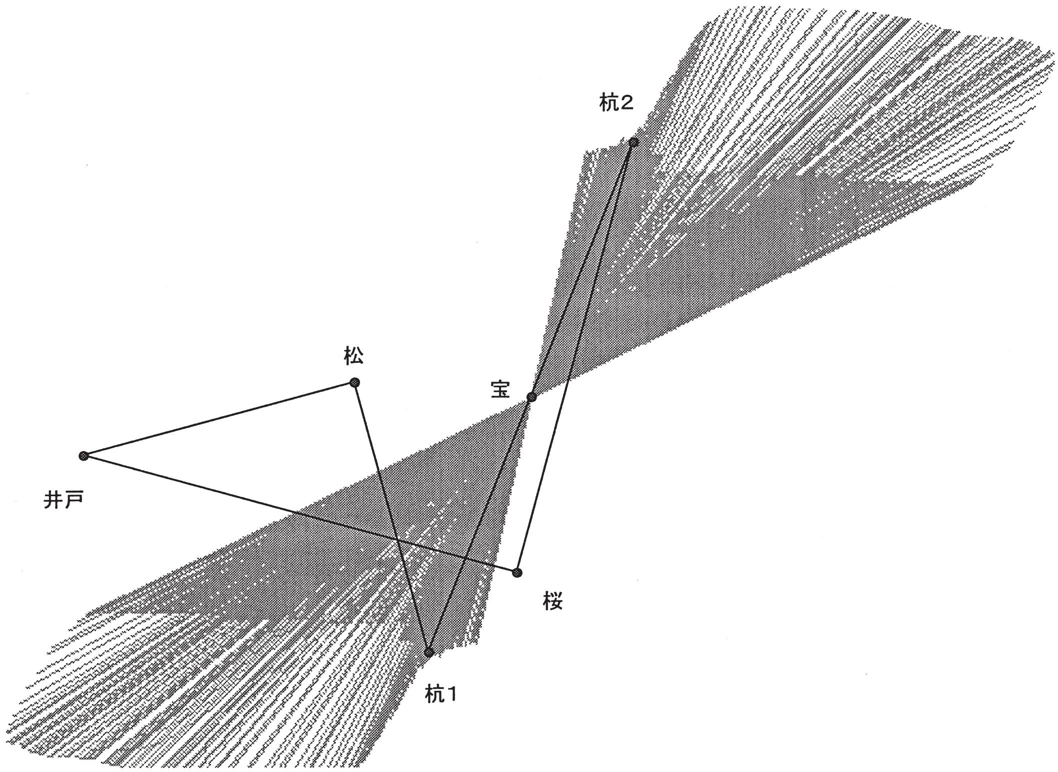


ところが，実際に島へ行ってみると，あるのは松の木と桜の木だけでした。もちろん杭はありません。井戸は埋まってしまってわかりません。

はたして宝を見つけることができるでしょうか。

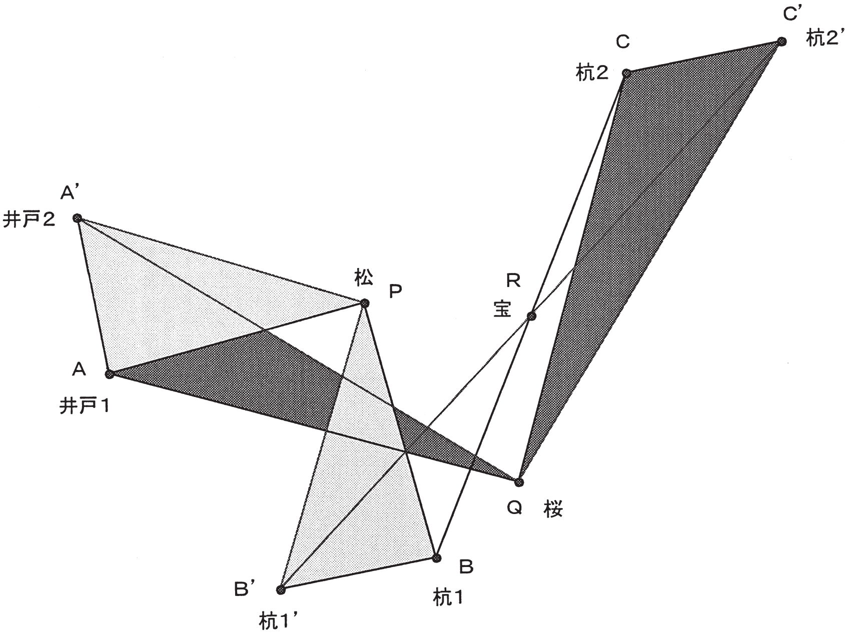


最初にかいた図で，井戸をいろいろなところに動かしてみましょう。するとどんなことがわかるでしょうか。



井戸をどこに動かしても宝の位置は変わりません。このことから宝のありかを見つけましょう。

なぜ，井戸をどこに動かしても宝の位置は変わらないのでしょうか。



上の図のように，井戸の位置を，井戸1と井戸2の2通り考えます。

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから　　$\triangle AA'P \equiv \triangle BB'P$

したがって　　$AA' = BB'$　　…………(1)

2辺とその間の角がそれぞれ等しいから　　$\triangle AA'Q \equiv \triangle CC'Q$

したがって　　$AA' = CC'$　　…………(2)

(1)，(2)より　　$BB' = CC'$

AA' から BB' へ，点Pを中心に$90°$の回転移動をしているから

$AA' \perp BB'$　　…………(3)

AA' から CC' へ，点Qを中心に$-90°$の回転移動をしているから

$AA' \perp CC'$　　…………(4)

(3)，(4)より　　$BB' /\!/ CC'$

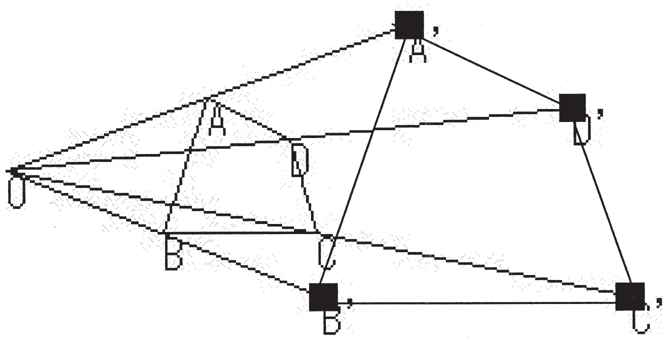
$\triangle RBB'$ と $\triangle RCC'$ で，平行線の錯角は等しいから　　$\triangle RBB' \equiv \triangle RCC'$

したがって　　$RB = RC$，$RB' = RC'$

したがって，杭1と杭2の中点と杭1′と杭2′の中点は一致します。このことから，井戸がどこへ移動しても，宝の場所は動かないことがわかります。

第5単元

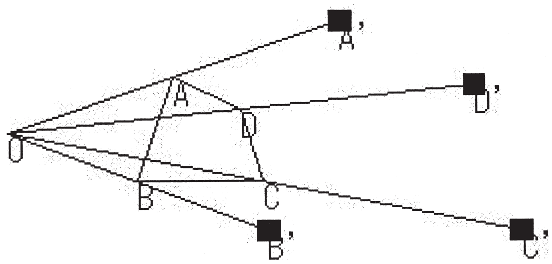
相似な図形

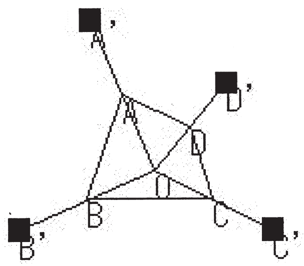


① 相似な図形

1 相似な図形

Q 下の図で，点 A′ は，OA の延長上に 2OA＝OA′ となるようにとった点です。B′，C′，D′ も同様にとった点です。





① A′，B′，C′，D′ を順に結び，四角形A′B′C′D′ をかいてみましょう。

② 四角形ABCD と四角形A′B′C′D′ で，次の(1)，(2)についてわかることをいってみましょう。

(1) 対応する辺の長さ

(2) 対応する角の大きさ

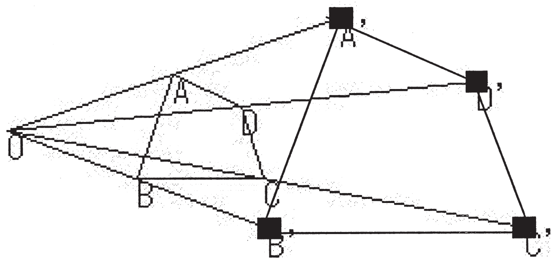
前ページの **Q** でかいた図から，次のことがわかります。

(1)　対応する辺の比は1：2になっている。

(2)　対応する角の大きさはそれぞれ等しい。

問　1　上の(1)，(2)のことを，中点連結定理を使って証明しなさい。

下の四角形A′B′C′D′と四角形ABCDの間には対応する辺の長さと大きさについて，次の関係があることがわかります。

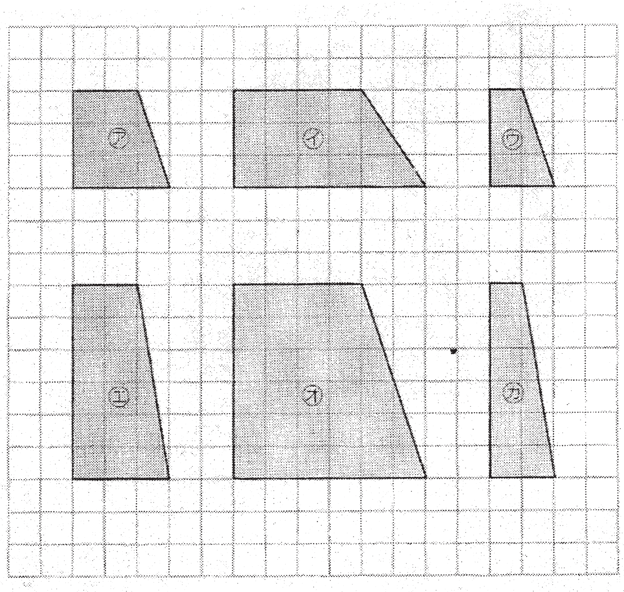


$A'B'=2AB$，$B'C'=2BC$，$C'D'=2CD$，$D'A'=2DA$

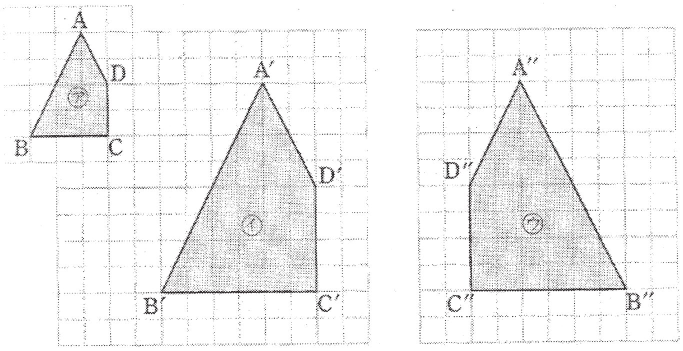
$\angle A'=\angle A$，$\angle B'=\angle B$，$\angle C'=\angle C$，$\angle D'=\angle D$

このようなとき，四角形A′B′C′D′は四角形ABCDを2倍に拡大した四角形といいます。

問　2　右の㋑～㋕の四角形のうち，㋐の四角形を2倍に拡大したものはどれですか。



1 つの図形を，形を変えずに一定の割合に拡大，または縮小して得られる図形は，もとの図形と**相似**であるといいます。



上の図で，四角形㋐と四角形㋑は相似です。また，四角形㋒は，四角形㋑の裏返しになっており，この 2 つの四角形は合同です。この場合にも，四角形㋐と㋒は相似です。

四角形 ABCD と四角形A′B′C′D′ が相似であることを

四角形ABCD ∽ 四角形A′B′C′D′

と表します。∽は相似を表す記号です。多角形でこの記号を使うときは，対応する頂点の名まえを周にそって同じ順に書きます。

●相似な図形の性質●

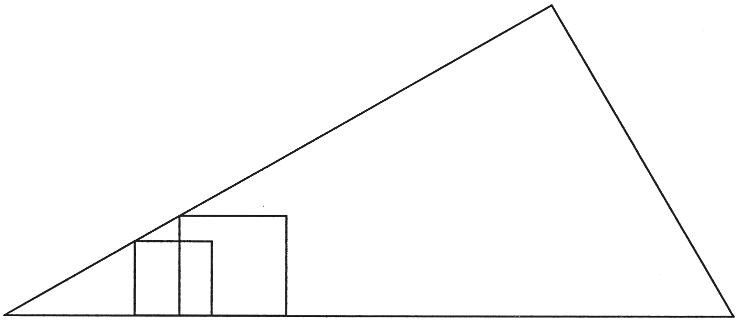
相似な図形では，次の性質が成り立つ。

1 対応する辺の比はすべて等しい。

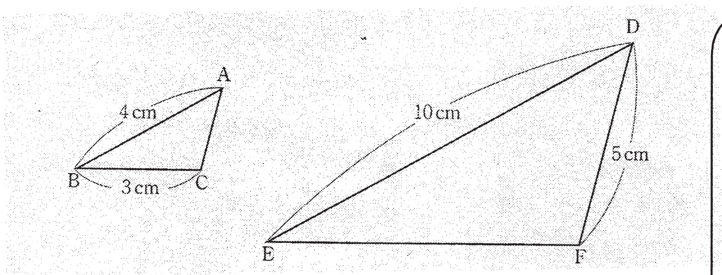
2 対応する角はそれぞれ等しい。

2 つの図形の対応する点どうしを通る直線がすべて 1 点 O に集まり，O から対応する点までの距離の比がすべて等しいとき，それらの図形は O を**相似の中心**として**相似の位置**にあるといいます。相似の位置にある 2 つの図形は相似です。また，相似の位置に置くことのできる 2 つの図形は相似です。

問　3　三角形の紙から正方形を切り取ります。正方形の１辺は三角形の辺上にあるようにして，もっとも大きな正方形を切り取るには，どのように切ればよいですか。



問　4　次の図で，△ABC∽△DEF　であるとき，次の問に答えなさい。



①　辺 EF の長さを求めなさい。

②　辺 AC の長さを求めなさい。

比の性質

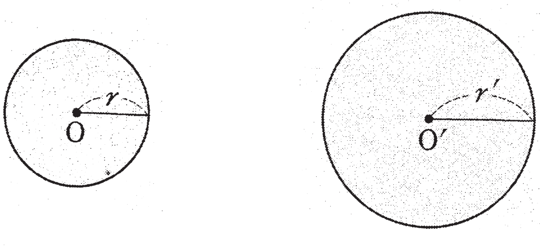
$a:b=c:d$

ならば

$ad=bc$

$$\overbrace{a:\underbrace{b=c}_{bc}:d}^{ad}$$

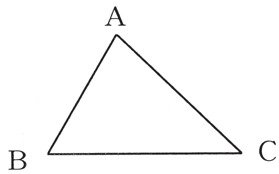
2 つの円は相似で，その相似比は半径の比に等しくなります。

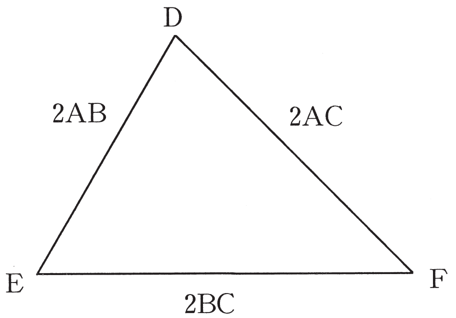


2　三角形の相似条件

▶▶相似な三角形のかきかたを考えましょう。

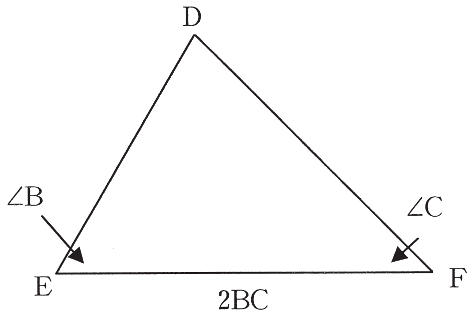
Q　A さん, B さん, C さんの 3 人は, △ABC と相似比が 1 : 2 である △DEF を，それぞれ次のように考えてかきました。△ABC をかき，それと相似比が 1 : 2 である △DEF を，3 人の方法でかいてみましょう。





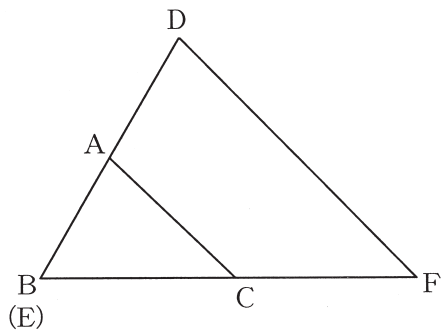
A さん

3 つの辺をそれぞれ 2 倍にしたよ。



B さん

辺 BC の 2 倍の長さの辺 EF をつくり，∠DEF＝∠B，∠DFE＝∠C となるところを点 D としたよ。



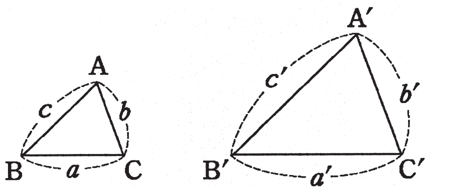
C さん

∠ABC と同じ大きさの角をつくり，角の辺をそれぞの 2 倍にしたところを点 D, F としたよ。

●三角形の相似条件●

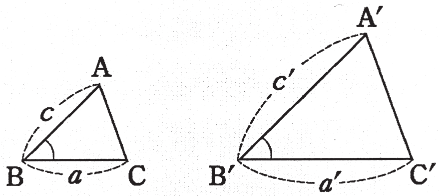
2つの三角形は，次のどれかが成り立つとき，相似である。

$\boxed{1}$　3組の辺の比が等しい。



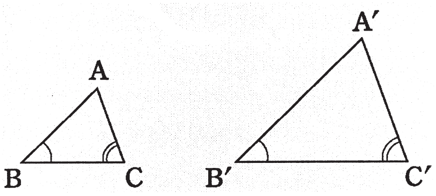
$a:a'=b:b'=c:c'$

$\boxed{2}$　2組の辺の比が等しく，その間の角が等しい。



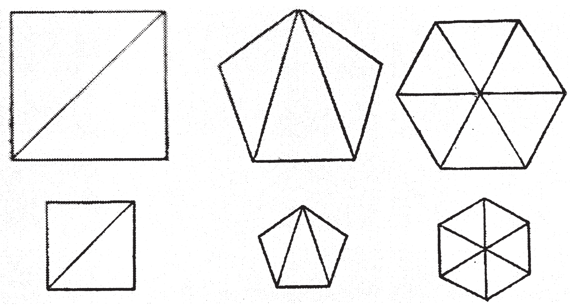
$\begin{cases} a:a'=c:c' \\ \angle B=\angle B' \end{cases}$

$\boxed{3}$　2組の角がそれぞれ等しい。

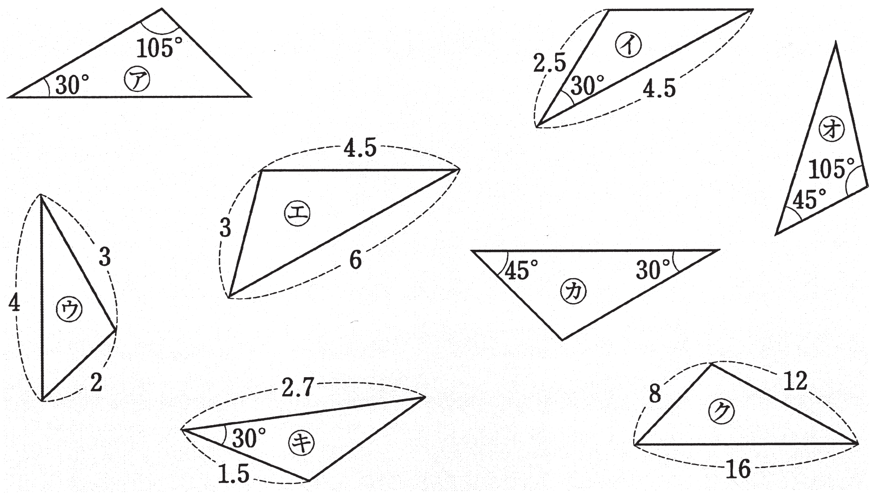


$\begin{cases} \angle B=\angle B' \\ \angle C=\angle C' \end{cases}$

問　1　正三角形はどんな大きさでもたがいに相似です。このわけを説明しなさい。また，正方形，正五角形，正六角形についても同じことがいえます。そのわけを，右の図を使って説明しなさい。

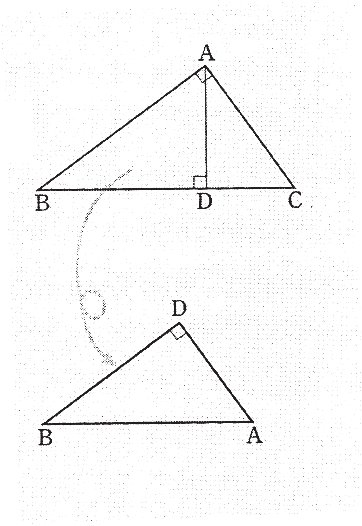


問 2 下の図で，相似な三角形の組を選び，記号∽を使って表しなさい。また，そのときに使った相似条件をいいなさい。



例 1 ∠A＝90° である直角三角形 ABC で，点 A から辺 BC に垂線 AD をひきます。

このとき，△ABC∽△DBA となることを証明しなさい。



<証明>　△ABC と △DBA において

$$\begin{cases} \angle BAC = \angle BDA = 90^\circ \\ \angle B \text{ は共通} \end{cases}$$

2 組の角がそれぞれ等しいから

△ABC∽△DBA

問 3 例 1 で証明したことから，BC : BA＝BA : BD を示しなさい。

問 4 例 1 について，次の問に答えなさい。

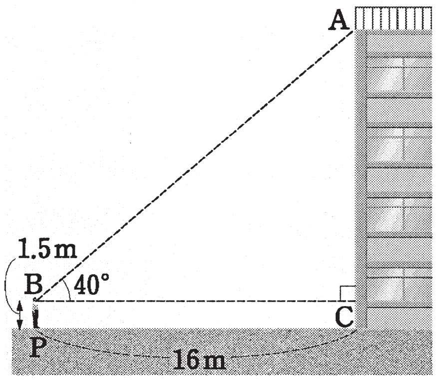
① △ADC∽△BDA となることを証明しなさい。

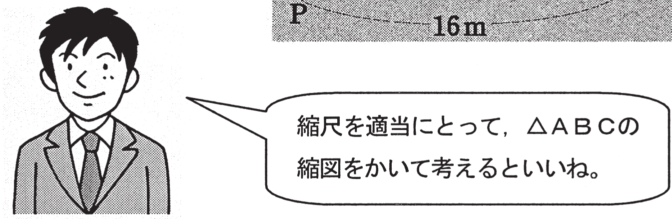
② ①で証明したことから，AD : CD＝BD : AD を示しなさい。

■相似の利用

▶▶縮図を利用して，身近な問題を考えてみましょう。

問　5　校舎から 16m はなれた地点Ｐから校舎の先端Ａを見上げたら，水平方向に対して 40° 上に見えました。目の高さを 1.5m として，校舎の高さを求めなさい。

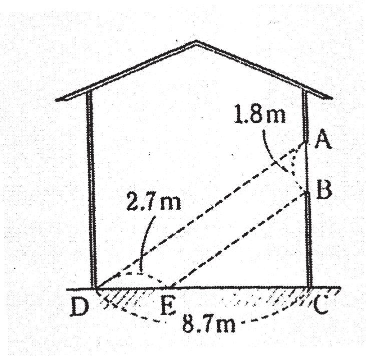




問　6　高い倉庫の窓 AB から水平な床に日光が差し込んでいます。日光は，ちょうど床のもっとも奥まで届いていました。

AB＝1.8m，CD＝8.7m，
DE＝2.7m

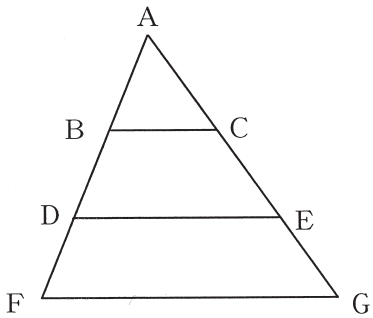
として，窓の高さ BC を求めなさい。



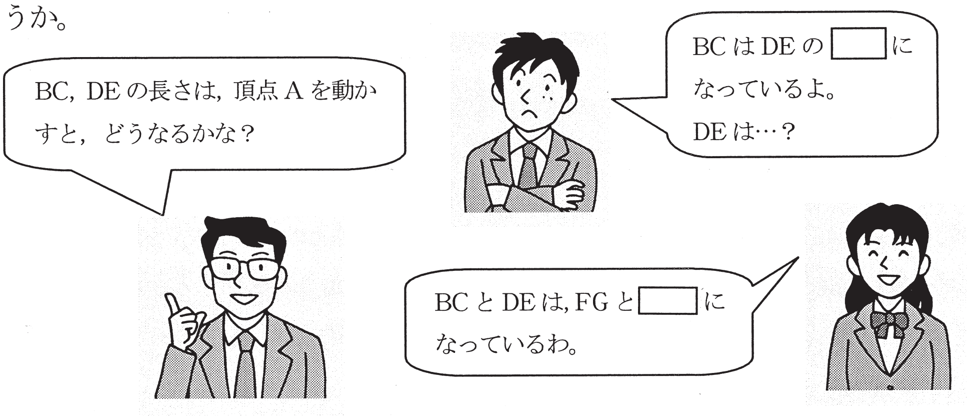
② 平行線と比

1 三角形と比

右の図のような△AFGのAF, AGをそれぞれ3等分した点をBとD, CとEとします。

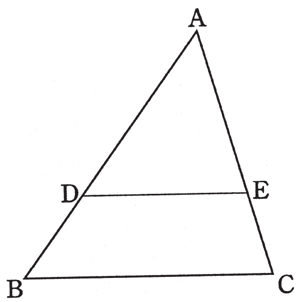


Q BとC, DとEを結び，頂点Aをいろいろなところへ動かしてみましょう。BC, DEについてどんなことがわかるでしょうか。



問 1 △ABC∽△ADE，△ABC∽△AFGを，それぞれ証明しなさい。

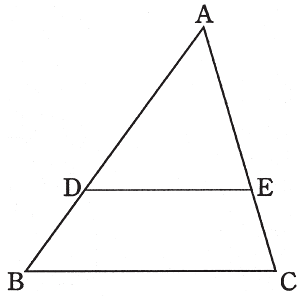
△ABCの辺BCに平行な直線が2辺AB，ACと交わる点をそれぞれD，Eとするとき，△ADEと△ABCの辺の間に，どんな関係が成り立つか調べてみよう。



問 2　右の図で，DE // BC とします。

① △ADE ∽ △ABC となることを証明しなさい。

② △ADE と △ABC の対応する辺を考えて，AD : AB と等しい比となる辺の組をあげなさい。



次に，上で調べたことの逆を考えてみましょう。

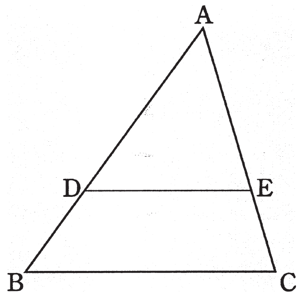
問 3　右の図で，D，E は

AD : AB＝AE : AC

となるようにとった点です。

① △ADE ∽ △ABC となることを証明しなさい。

② DE // BC となることを証明しなさい。



これまでに調べたことから，次の定理が成り立つことがわかります。

●三角形と比(1)●

定理　△ABC の辺 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき

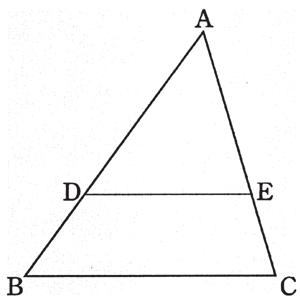
$\boxed{1}$ DE // BC　ならば

AD : AB＝AE : AC

＝DE : BC

$\boxed{2}$ AD : AB＝AE : AC　ならば

DE // BC



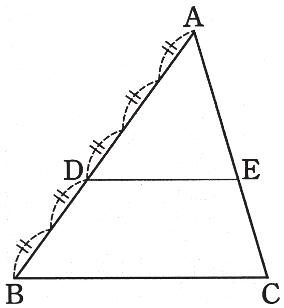
Q 右の図で，DE // BC とします。

AD : DB＝3 : 2

として

AD : AB，AE : AC，AE : EC

をそれぞれ求めてみましょう。



次に，AD : DB＝AE : EC のとき，DE と BC の関係を調べてみましょう。

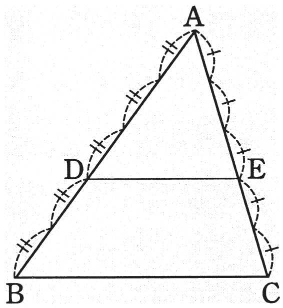
問 4 右の図で

AD : DB＝AE : EC＝3 : 2

として，次の問に答えなさい。

① AD : AB，AE : AC をそれぞれ求めなさい。

② DE // BC を証明しなさい。



一般に，次の定理が成り立ちます。

●三角形と比(2)●

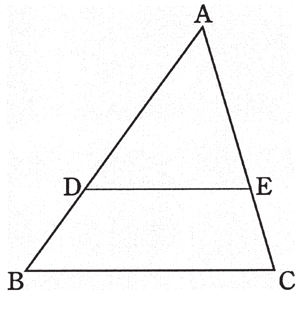
定理 △ABC の辺 AB，AC 上の点をそれぞれ D，E とするとき

[1] DE // BC ならば

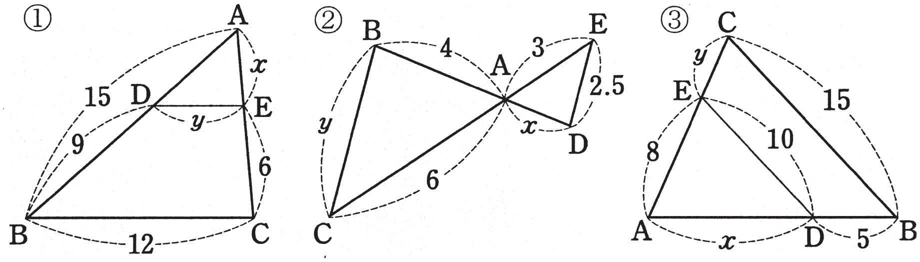
AD : DB＝AE : EC

[2] AD : DB＝AE : EC ならば

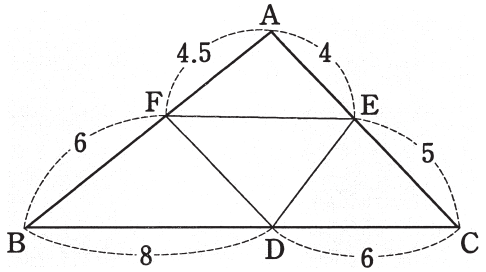
DE // BC



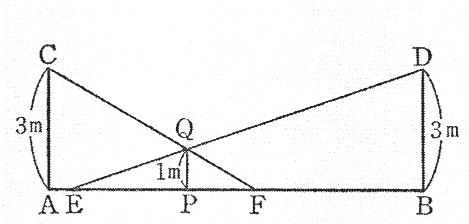
問　5　下の図で，DE // BC とするとき，x，y の値を求めなさい。



問　6　右の図で，線分 DE，EF，FD のうち，△ABC の辺に平行なものはどれですか。そのわけもいいなさい。



問　7　右の図のように，水平な道路上の 10m はなれた 2 つの地点 A，B に高さ 3 m の街灯があります。身長 1 m の子ども (PQ) が A から B までまっすぐに歩くとき，この街灯の光によって，子どもの前後にできる影 PF，PE の長さについて，次の問に答えなさい。



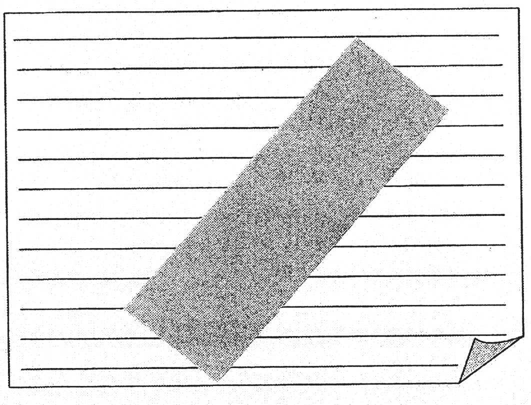
① AP＝a m のとき，影 PF の長さを求めなさい。

② 影の長さの和 EF は，子どもの位置に関係なく一定です。その長さを求めなさい。

2 平行線と比

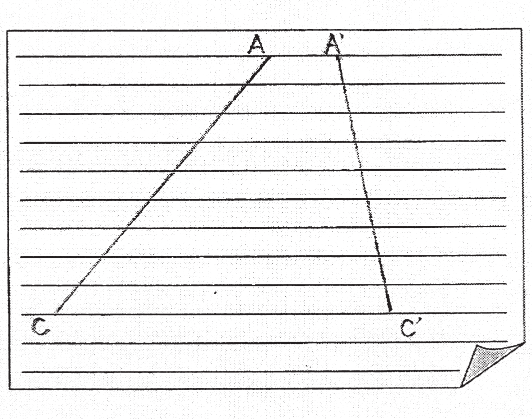
紙テープを3等分するにはどのようにすればよいでしょうか。

右のように，ノートの罫線を利用すると，長さをはかったり，折ったりせずに紙テープを3等分することができます。



問 1 右の図のようにして，テープの長さを3等分しなさい。

右のような図を考えると，線分ACと線分A′C′は，ノートの罫線によって，同じ比に分けられていることがわかります。

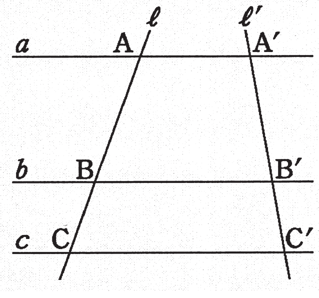


一般に，次の定理が成り立ちます。

●平行線と比●

定理 平行な3つの直線 a, b, c が直線 ℓ とそれぞれA, B, Cで交わり，直線ℓ' とそれぞれA′, B′, C′で交われば

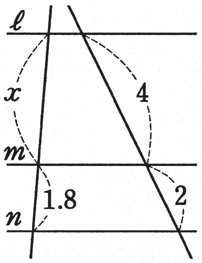
$$AB : BC = A'B' : B'C'$$



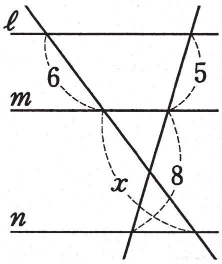
問　2　前ページの平行線と比の定理を証明しなさい。

問　3　下の図で，ℓ，m，n がいずれも平行であるとき，x の値を求めなさい。

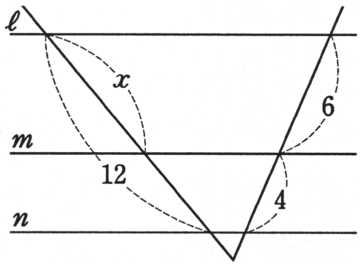
①



②



③



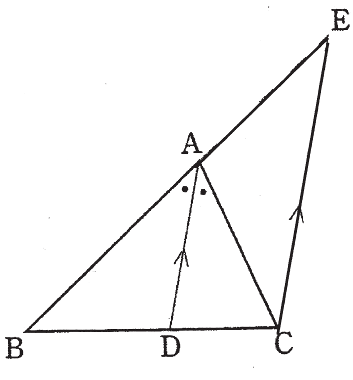
問　4　線分 AB 上にあり，AB を 3：2 の比に分ける点 P を求めなさい。

また，その方法で AP：BP＝3：2 となるわけもいいなさい。

問　5　△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると

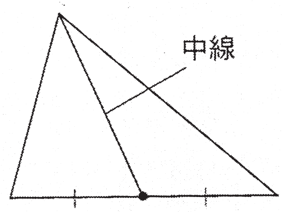
AB：AC＝BD：DC

となります。このことを，右の図を参考にして証明しなさい。



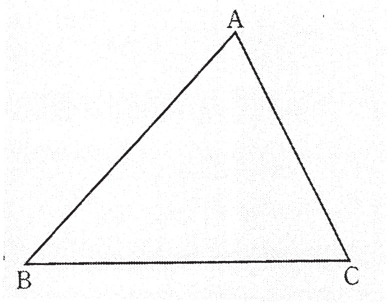
3　三角形の重心

三角形の１つの頂点とそれに対する辺の中点とを結ぶ線分を，**中線**といいます。



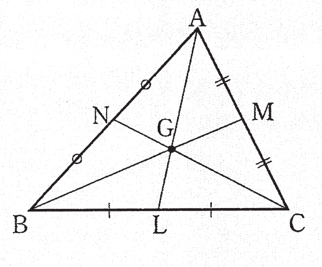
GSP を使って，△ABC に，3 つの中線 AL，BM，CN をひいて，頂点 A を動かしてみましょう。

Q　右の三角形に 3 つの中線をひきなさい。3 つの中線についてどんなことがわかりますか。



●三角形の重心●

三角形の 3 つの中線は，1 点で交わる。その交点は, 3 つの中線をそれぞれ 2:1 に分ける。



三角形の 3 つの中線の交点を，その三角形の**重心**といいます。

■四角形の重心

▶▶次のようにして，四角形の重心を求めてみましょう。

四角形の重心は，次のような手順で求めることができます。

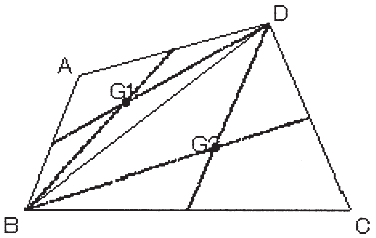
$\boxed{1}$ 対角線 BD をひき，四角形を 2 つの三角形△ABD と△DBC に分ける。

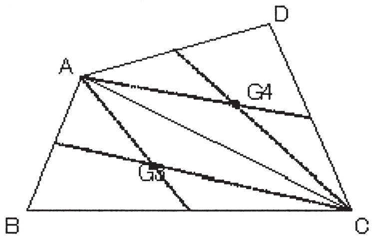
$\boxed{2}$ △ABD の重心を求め，G_1 とする。
△DBC の重心を求め，G_2 とする。
G_1 とG_2 を結ぶ。四角形 ABCD の重心は線分G_1G_2 上にある。

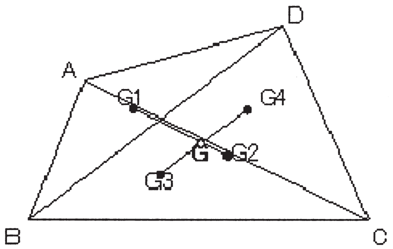
$\boxed{3}$ 四角形 ABCD をもう 1 つの対角形 AC で 2 つの三角形△ABC と△ACD に分ける。

$\boxed{4}$ △ABC の重心を求め，G_3 とする。
△ACD の重心を求め，G_4 とする。
G_3 とG_4 を結ぶ。四角形 ABCD の重心は線分G_3G_4 上にある。

$\boxed{5}$ 線分G_1G_2 と線分G_3G_4 の交点 G が，四角形 ABCD の重心である。







$\boxed{問\ 1}$ 適当な四角形をかき，その四角形の重心を求めなさい。

➲➲厚紙に四角形，三角形をかき，重心を求めてこまをつくってみましょう。

編集委員		杉山吉茂	東京学芸大学
		吉川行雄	山梨大学
		渡邊公夫	早稲田大学
		藤井斉亮	東京学芸大学
		中村享史	山梨大学
		清水美憲	筑波大学
執筆者	中学校	新井　仁	長野市立柳町中学校
		清水宏幸	山梨大学附属中学校
		本田千春	東京学芸大学附属国際中等教育学校
		森　　聖	埼玉県新座市立第二中学校
	高等学校	植野美穂	東京学芸大学附属国際中等教育学校
		高橋　均	東京大学附属中等教育学校
		高橋広明	東京学芸大学附属国際中等教育学校
		西村圭一	東京学芸大学附属国際中等教育学校
		細矢和博	東京大学附属中等教育学校
	小学校	石井勝博	埼玉県ふじみ野市立みずほ台小学校
		市川　啓	埼玉県ふじみ野市立西原小学校
		榎本　崇	埼玉県ふじみ野市駒西小学校
		笠井健一	東京都日野市立日野第七小学校
		佐々木千穂	東京都千代田区立番町小学校
		杉田博之	成城学園初等学校
		高橋恵美子	東京都東久留米市第二小学校
		高橋丈夫	東京学芸大学附属小金井小学校
		田端輝彦	宮城教育大学教育学部
		土屋利美	埼玉県狭山市立入間川小学校
		長島寛和	東京学芸大学附属小金井小学校
		中野博之	弘前大学教育学部
		早川　健	山梨県甲府市立新田小学校
		山田剛史	東京学芸大学附属竹早小学校
		亘理史子	東京都目黒区立原町小学校